Psub 2011

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & a^2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ $a \in \mathbb{R}$

Para que uma matriz seja diagonalizável, precisamos que a multiplicidade algébrica e geométrica dos autovalores sejam iguais

Note que: A é uma matriz de coeficientes reais, portanto se houver autovalor complexo seu conjugado também será autovalor, logo o terceiro autovalor será real e teremos 3 autovalores distintos e, automaticamente será diagonalizável sobre $\mathbb{C}$.

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & a^2 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} P_\lambda &= (1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) + a^2(1-\lambda) \\ P_\lambda &= (1-\lambda)\left[-2\lambda + \lambda^2 + a^2\right] \end{aligned}$$

Primeiramente vamos induzir o problema a ser diagonalizável sobre $\mathbb{C}$

$\Delta < 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4a^2 < 0$, portanto, se $a < -1$ ou $\boxed{a > 1}$ a matriz é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$, mas e sobre $\mathbb{R}$?

Para facilitar vamos considerar, de início, apenas o caso em que temos raízes distintas, portanto $\Delta > 0$, $-1 < a < 1$

Obs: a multiplicidade geométrica é sempre maior ou igual a 1 e menor ou igual à multiplicidade algébrica, por esse motivo, sempre que tivermos autovalores distintos, a matriz será diagonalizável,

para $a = 1$ $P_\lambda = (1-\lambda)^3$, $ma = 3$, $\lambda = 1$ → multiplicidade algébrica

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{aligned} &\rightsquigarrow 0x + 0y + 0z = 0 \\ &\rightsquigarrow 0x + y + z = 0 \\ &\quad y = -z \end{aligned}$$

Base: $\{(x, -z, z)\}$ $mg = 2$

$\Rightarrow \{x(1,0,0), z(0,-1,1)\}$ $mg \neq ma$

② $T: V \to V$ $\quad v \in V$ t.q. $v \neq 0_V$

$Im(T) = [v]$ e $T(v) = 0_V$ Sabemos que $T(w) = \lambda w$

• A $Im(T)$ é tudo o que não está no Kernel, portanto, considera-se autovalores não nulos, mas $T(v) = 0_V$, então T é um operador nulo!

Já sabemos que v é o único vetor da $Im(T)$ pois T é operador nulo e os vetores da base da $Im(T)$ devem ser LI, e a única forma de termos $T(w) = 0_V$ é com w sendo nulo, ou seja, $w = v$, ou com $\lambda = 0$, mas aí estaremos avaliando o $Ker(T)$, sabemos que $\dim Ker(T) + \dim Im(T) = n$, mas $\dim Im(T) = 1$ então $\dim Ker(T) = n-1$, logo $nul(0) = n-1$

③ $S = [\underbrace{(1,1,1)}_{S_1} \underbrace{(1,-1,0)}_{S_2}]$ $\quad T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ usual

$u = (a, b, c)$

$T(u) = proj_S u$

$$proj_S u = \frac{\langle u, S_1 \rangle}{\langle S_1, S_1 \rangle} S_1 + \frac{\langle u, S_2 \rangle}{\langle S_2, S_2 \rangle} S_2$$

$$Proj_S u = \frac{a+b+c}{3}(1,1,1) + \frac{a-b}{2}(1,-1,0)$$

avaliando o $Ker(T)$ precisamos de $u \neq 0_S$ t.q. $T(u) = 0_S$

$$\begin{cases} \frac{a+b+c}{3} + \frac{a-b}{2} = 0 \Rightarrow 2a+2b+2c+3a-3b=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 5a-b+2c=0 \\ \frac{a+b+c}{3} - \frac{(a-b)}{2} = 0 \Rightarrow 2a+2b+2c-3a+3b=0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -a+5b+2c=0 \\ \frac{a+b+c}{3} = 0 \Rightarrow a+b+c=0 \end{cases}$$

Só preciso das duas primeiras equações, pois LD

$$\begin{cases} 5a-b+2c=0 \\ -a+5b+2c=0 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=b \\ c=-2b \end{cases}$$

$Ker(T) = b(1,1,-2)$

④ $T: P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$

$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $T(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $T(t^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ Tq $\ker(T) = \{(x, y, z)\}$

D

$\begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x = -z \\ y = z \end{matrix}$ $\ker(T) = \{z(-1, 1, 1)\}$

logo: $\ker(T) = \alpha(-1 + t + t^2)$

Para $\alpha = -2$ ou $\alpha = -3$ ficamos com as alternativas ⓒ ou ⓓ, vamos agora achar a base da imagem, nos notamos facilmente que é impossível formar a base $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ usando este T.

⑤ $\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2)$

$g(t) = t^2$ $f(t) = a + bt$ base ortogonal

f é o polinômio de P_1 mais próximo de g, portanto $f = \text{proj}_{P_1} g$ tq $P_1 = \{(1, 1+xt)\}$

vamos achar P_1, fazendo $\langle 1, 1+xt \rangle = 0$

$x = -1$ então $P_1 = \{(1, 1-t)\}$

$$a + bt = \frac{\langle t^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} 1 + \frac{\langle t^2, 1+t \rangle}{\langle 1+t, 1+t \rangle} (1-t)$$

$$a + bt = \frac{5}{3} + \frac{0(1+0) + 1.(1+1) + 4(1+2)}{(1+0)(1+0) + (1+1)(1+1) + (1+2)(1+2)} (1-t)$$

$$a + bt = \frac{5}{3} + \frac{14}{14}(1-t) \Rightarrow 3(a+bt) = 5 + 3 - 3t$$

$$3(a+b) = 5$$

⑥ $3x^2 + 3y^2 - 2xy - 4xz - 4yz - 2 = 0$

Para montar a matriz, basta colocar os coeficientes dos termos quadráticos na diagonal e dividir simetricamente os termos mistos:

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \leftarrow x \\ \leftarrow y \\ \leftarrow z \end{matrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix} & \end{array}$$

Teorema: Para eliminar os termos mistos basta fazer uma rotação do sistema, ou seja, achar os autovalores: que neste caso já são dados: $\lambda = 4, -2$ mas não sabemos qual a multiplicidade de cada um, então vamos analisar:

$\lambda = 4$

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \langle D \rangle$$

$-x - y - 2z = 0$

$x = -y - 2z$

Base: $\{(-y-2z, y, z)\}$

$\Rightarrow y(-1,1,0) + z(-2,0,1)\}$

mg: 2

Basta colocar os autovalores multiplicando os novos termos quadráticos e "sumir" com os termos mistos:

$4u^2 + 4v^2 - 2t^2 = 2 \Rightarrow 2u^2 + 2v^2 - t^2 = 1$

⑦ $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $P_\lambda = (1-\lambda)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 5$

$\Delta = 4 - 20 = -16$

$\lambda = \dfrac{2 \pm 4i}{2} \begin{cases} 1+2i \\ 1-2i \end{cases}$

Para raízes complexas não é necessário analisar o conjugado pois obtemos bases repetidas:

$\lambda = 1 + 2i$

$$\begin{bmatrix} -2i & -2 \\ 2 & -2i \end{bmatrix}$$

$-2ix - 2y = 0$

$y = -ix$

Base: $\{(x, -ix)\}$

$\Rightarrow (1, -i)$

Bases da solução:

$x(t) = \{ e^{(1+2i)t}(1, -i) \}$

$e^{(1+2i)t} = e^t(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t)$ A base será:

$e^t(\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t, -i\cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$ Basta separar os complexos dos reais para termos as duas bases: $\{ e^t(\cos 2t, \operatorname{sen} 2t), e^t(\operatorname{sen} 2t, -\cos 2t) \}$

Portanto a solução da equação é:

$X(t) = c_1 e^t(\cos 2t, \operatorname{sen} 2t) + c_2 e^t(\operatorname{sen} 2t, -\cos 2t)$

Mas sabemos que $x(0) = (1,-1)$, portanto:

$c_1 e^0(\cos 0, \operatorname{sen} 0) + c_2 e^0(\operatorname{sen} 0, -\cos 0) = (1,-1)$

$c_1 = 1$, $c_2 = 1$, então:

$X(t) = e^t(\cos 2t, \operatorname{sen} 2t) + e^t(\operatorname{sen} 2t, -\cos 2t)$

$= e^t(\underbrace{\cos 2t + \operatorname{sen} 2t}_{x_1(t)}, \underbrace{\operatorname{sen} 2t - \cos 2t}_{x_2(t)})$

somando os dois termos: $x_1(t) + x_2(t) = e^t\, 2\operatorname{sen} 2t$

(8) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ simétrico.

Sabemos que $T(u) = \lambda u$ e que

$T(1,-1,1) = 1.(1,-1,1)$ e $T(1,1,0) = 2(1,1,0)$

Teorema: em um operador simétrico, todos os autovetores de autovalores distintos são LI e ortogonais:

$\langle (1,-1,1),(a,b,c)\rangle = 0 \Rightarrow a - b + c = 0$

$\langle (1,1,0),(a,b,c)\rangle = 0 \Rightarrow a + b = 0$

$a = -b$, $c = 2b$ autovetor: $b(-1,1,2)$

Além disso T é não sobrejetor, ou seja $\dim Im(T) < 3$ e já temos dois vetores que pertencem à imagem, logo $\dim Ker(T) = 1$ e o autovalor associado à $(-1,1,2)$ é zero:

Queremos encontrar $T(4,0,-1)$

$T(4,0,-1) = \alpha T(1,-1,1) + \beta T(1,1,0) + \gamma T(-1,1,2)$

$$\begin{cases} \alpha + \beta - \gamma = 4 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\gamma = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

$T(1,-1,1) + 2T(1,1,0) - T(-1,1,2)$

$= (1,-1,1) + (4,4,0) - 0(-1,1,2)$

$= (5,3,1)$

autovalor

(9) $B = \{(1,1)(0,1)\}$ $C = \{(1,0)(0,1)\}$

$T(1,2) = (1,2)$ e $T(-2,1) = (0,0)$

$$[T]_{CB} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{T(1,0) \quad T(0,1)}_{\text{Transf. em } C}$$

$T(1,0) = xT(1,2) + yT(-2,1)$

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5y = -2 \\ x = 1/5 \end{cases}$$

$T(1,0) = \frac{1}{5}(1,2) - \frac{2}{5}(0,0)$

$T(0,1) = zT(1,2) + wT(-2,1)$

$$\begin{cases} z - 2w = 0 \\ 2z + w = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} w = 1/5 \\ z = 2/5 \end{matrix}$$

$T(0,1) = \frac{2}{5}(1,2) + \frac{1}{5}(0,0)$

Passando para as coordenadas de B:

$$\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right) = a(1,1) + b(1,0) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 1/5 \\ a = 2/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2/5 \\ b = -1/5 \end{cases}$$

$[T(1,0)]_B = (2/5, -1/5)$

$$\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right) = a(1,1) + b(1,0) \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2/5 \\ a = 4/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = -2/5 \\ a = 4/5 \end{matrix}$$

$[T(0,1)]_B = (4/5, -2/5)$

$$[T]_{CB} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 4/5 \\ -1/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

mas não temos essa resposta, entretanto note que:

$$\frac{(1) - 4.(2)}{2} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2/5 & 4/5 \\ 2/5 & 4/5 \end{bmatrix} \div 2$$

então: $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(10) $T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ $\lambda = -1$

$$\ker(T) = \left[\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right]$$

se $\dim \ker(T) = 3$ então a multiplicidade algébrica e geométrica do autovalor $\lambda = 0$ é 3

Portanto, de imediato temos que

$P_\lambda = t^3(t+1)$

(11) $T: V \to V$, $P_T(T)$ tem raízes reais

teremos que avaliar cada alternativa, mas antes faremos algumas considerações:

$\dim Ker(T) + \dim(Im(T)) = \dim(V)$ e

$\dim Im(T) \geq 1$

temos que B é base de $Ker(T-\lambda_j I)$, portanto, necessariamente $\dim(B) < \dim(V)$ já que pelo menos uma das dimensões será ocupada pela imagem. Além disso $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_K$ ou seja, todos os autovalores de $Ker(T-\lambda_j I)$ são distintos e formam uma base LI do kernel

Portanto, B é LI e gera o kernel, mas não gera V

(12) $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ $V(2) = [(1,1)]$

$V(4) = [(-1,1)]$

$3x^2 + 3y^2 - 2xy + 4x + 4y = 4$

usaremos inicialmente o mesmo procedimento da questão (6) para fazer a rotação e, em seguida precisaremos fazer a translação, para isso, precisamos ortonormalizar os autovetores: $v(2) = [(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})]$ e $v(4) = [(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})]$

Agora basta reescrever as variáveis:

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \to \begin{array}{l} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' \\ y = 1/\sqrt{2}\,' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' \end{array}$$

e reescrever a equação substituindo os termos quadráticos e mistos pelos autovalores e os independentes pelas novas variáveis:

$2(x')^2 + 4(y')^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \cancel{\frac{4}{\sqrt{2}}y'} + \frac{4}{\sqrt{2}}x' + \cancel{\frac{4}{\sqrt{2}}y'} = 4$

$x'^2 + 2y'^2 + 2\sqrt{2}x' = 2$, agora basta completar quadrados: $(x' + \sqrt{2})^2 - 2 + 2y'^2 = 2$

$u^2 + 2v^2 = 4$

(13) $T: V \to V$ $\quad v \in V$ tq $v \neq 0_V$,

$Im(T) = v$ e $T(v) = \alpha v$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Para ser invertível, obrigatoriamente, $\alpha \neq 0$, pois o autovalor de T^{-1} é $1/\alpha$, mas isso não é suficiente, precisamos que T seja bijetora, ou seja, todos os outros autovalores devem ser não nulos.

Além disso, se $\alpha = 0$, v será base do Kernel (absurdo) então T não seria diagonalizável, mas, se $\alpha \neq 0$ isso garante que será diagonalizável? Neste caso sim, pois $Im(T)$ contém unicamente o vetor v, logo todos os outros autovalores são nulos e geram o autoespaço do núcleo (que deve ser LI), logo teremos n autovetores distintos e será diagonalizável.

(14) $T: V \to V$

I) $p_\lambda = (x-\lambda_1)(y-\lambda_2)\cdots(z-\lambda_n)$

a multiplicidade algébrica de cada raiz é 1, pois elas são distintas entre si, como $1 \leq mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$ então $mg(\lambda) = 1$ é diagonalizável

II) $\dim Ker(T - \lambda I) > ma(\lambda)$

Impossível, pois $\dim Ker(T-\lambda I) = mg(\lambda) \leq ma(\lambda)$

III) Verdadeira, basta usar o mesmo raciocínio de I) e II)

(15) $A \in M_n(\mathbb{R})$ $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$T_A(x) = Ax, \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $S_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$

$S_A(z) = Az, \forall z \in \mathbb{C}^n$

Considerações: se uma matriz é diagonalizável sobre $\mathbb{R}$ ela é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$; mas a recíproca é Falsa!

Se A é simétrica então A é diagonalizável, mas isso não é uma condição necessária!

Avaliando as alternativas:

a) e e) utilizam a mesma lógica, se S_A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ então $ma(\lambda) = mg(\lambda)$ $\forall \lambda \in \sigma_A$, idem para T_A

b) Já explicado

c) x e z atuam simplesmente como constantes, não alterando os autovalores e autovetores da matriz A.

d) como citado, não é uma condição necessária portanto essa afirmativa é falsa!

(16) $\mathbb{R}^4$ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ usual $a, b \in \mathbb{R}$

$S = [(1, a, 0, b), (0, 1, 1, b), (a, 1, 0, ab)]$

pede-se $\dim(S^\perp) = 1$ então $S^\perp = \{(x, y, z, w)\}$

$$\begin{cases} \langle (1, a, 0, b)(x, y, z, w) \rangle = 0 \\ \langle (0, 1, 1, b)(x, y, z, w) \rangle = 0 \\ \langle (a, 1, 0, ab)(x, y, z, w) \rangle = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + ay + bw = 0 \\ y + z + bw = 0 \\ ax + y + abw = 0 \end{cases}$$

Para ter $\dim(S^\perp) = 1$ precisamos escrever em termos de apenas uma variável, escalonando

$$\begin{cases} x + ay + bw = 0 \\ y + z + bw = 0 \\ 0 \quad (1-a^2)y = 0 \end{cases}$$

se $(1-a^2) = 0$ então teremos y como incógnita e poderemos escrever x e z em função de y e w

$\dim(S^\perp) = 2$, então $a \neq \pm 1 \Rightarrow y = 0$