GABARITO P3 - 2011

Álgebra Linear II - MAT2458

Questão	Resposta
1	A
2	C
3	E
4	C
5	D
6	B
7	C
8	B
9	B
10	B
11	D
12	C
13	D
14	C
15	D
16	B

PoliShare

Nesta prova, se V é um espaço vetorial e $u_1, \ldots, u_n$ são vetores de V, o subespaço de V gerado por $\{u_1, \ldots, u_n\}$ será denotado por $[u_1, \ldots, u_n]$.

Sempre que V tiver uma base canônica, ela será denotada por **can**.

Se V estiver munido de um produto interno e W for um subespaço de V, a projeção ortogonal de um vetor $x \in V$ sobre W, se existir, será denotada por $\mathrm{proj}_W x$.

Se λ é um autovalor de um operador linear, então o auto-espaço associado a λ será denotado por $V(\lambda)$.

Se M é uma matriz, a matriz transposta de M será denotada por M^{t}.

As equações de quádricas e cônicas estão sempre dadas com respeito a um sistema ortogonal de coordenadas.

Q1. Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$. Então, a matriz $\begin{bmatrix} a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{bmatrix}$ é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se, e somente se,

(a) $a \neq i$ e $c = 0$.

(b) $a \neq i$ e $c \neq 0$.

(c) $a = i$ e $b = 0$.

(d) $a = i$ e $c = 0$.

(e) $a \neq i$ e $b = 0$.

Q2. Seja $A \in M_3(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e sejam λ e μ raízes do polinômio característico de A. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear cuja matriz com respeito à base canônica de $\mathbb{R}^3$ seja A. Considere as seguintes afirmações:

(I) λ e μ são números reais.
(II) Existe uma matriz $M \in M_3(\mathbb{R})$ tal que $M^{\mathrm{t}}AM$ é uma matriz diagonal.
(III) $V(\lambda) = V(\mu)^{\perp}$.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (I) e (III) são sempre verdadeiras.
(b) Apenas a afirmação (III) é sempre verdadeira.
(c) Apenas as afirmações (I) e (II) são sempre verdadeiras.
(d) Apenas as afirmações (II) e (III) são sempre verdadeiras.
(e) Apenas a afirmação (I) é sempre verdadeira.

Q3. Seja V um espaco vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ munido de um produto interno $\langle\ ,\ \rangle$. Sejam $u, v \in V$ e seja W um subespaço de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) O operador linear $T\colon V \to V$ definido por $T(x) = x - \mathrm{proj}_W x$, para todo $x \in V$, é simétrico.
(II) O operador linear $S\colon V \to V$ definido por $S(x) = \langle x, u\rangle v + \langle x, v\rangle u$, para todo $x \in V$, é simétrico se, e somente se, u é ortogonal a v.
(III) O operador linear $P\colon V \to V$ definido por $P(x) = \langle x, u\rangle v$, para todo $x \in V$, não é simétrico, quaisquer que sejam u e v.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
(b) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
(c) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(d) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
(e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q4. A solução geral do sistema

$$X'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} X(t)$$

é

(a) $c_1e^t(\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t) + c_2e^t(\operatorname{sen} t, -\cos t, \operatorname{sen} t) + c_3e^t(1,0,0)$, onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(b) $c_1e^t(\cos t, -\operatorname{sen} t, \cos t) + c_2e^t(\operatorname{sen} t, \cos t, -\operatorname{sen} t) + c_3e^t(1,0,0)$, onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(c) $c_1e^t(\cos t, -\operatorname{sen} t, \cos t) + c_2e^t(\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} t) + c_3e^t(1,0,0)$, onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(d) $c_1e^t(\cos t, -\cos t, \cos t) + c_2e^t(\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t) + c_3e^t(1,0,0)$, onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

(e) $c_1e^t(\cos t, \operatorname{sen} t, \cos t) + c_2e^t(-\operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} t) + c_3e^t(1,0,0)$, onde $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$.

Q5. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que $[T]_{\mathbf{can}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que $0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}$ são autovalores de T e que

$$V(0) = [(1,0,-1)], \quad V(\sqrt{2}) = [(1,\sqrt{2},1)], \quad V(-\sqrt{2}) = [(\sqrt{2},-2,\sqrt{2})],$$

dada uma quádrica de equação $2xy + 2yz + 4y = 2$, uma equação reduzida para essa quádrica é

(a) $s^2 + t^2 = \sqrt{2}$.

(b) $s^2 - t^2 = 1$.

(c) $\sqrt{2}s^2 - \sqrt{2}t^2 = 1$.

(d) $s^2 - t^2 = \sqrt{2}$.

(e) $s^2 - t^2 = 2$.

Q6. Seja $b \in \mathbb{R}$ e considere uma cônica de equação $3x^2 + 2bxy + 3y^2 - 6x + 3 = 0$. Considere as seguintes afirmações:

(I) A cônica é uma parábola se, e somente se, $b = 3$ ou $b = -3$.
(II) A cônica é uma elipse se, e somente se, $b \neq 0$, $b \neq 3$ e $b \neq -3$.
(III) A cônica é um par de retas concorrentes se, e somente se, $b = 0$.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(b) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
(c) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
(d) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
(e) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q7. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ munido de um produto interno e seja $T\colon V \to V$ um operador linear. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ um autovalor de T e seja S um subespaço de V. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se T é simétrico e S é invariante por T, então $S^{\perp}$ é invariante por T.
(II) O subespaço $V(\lambda)$ é invariante por T.
(III) O subespaço $V(\lambda)^{\perp}$ é invariante por T.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
(b) Apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras.
(c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
(d) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
(e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q8. Se uma cônica possui equação $2xy + \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 1$, então uma equação reduzida para essa cônica é

(a) $r^2 + t^2 = 1$.
(b) $r^2 - t^2 = 2$.
(c) $r^2 - t^2 = 0$.
(d) $r^2 - t^2 = 1$.
(e) $r^2 + 2\sqrt{2}t = 1$.

Q9. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico tal que os únicos autovalores de T sejam -1 e 1, e $V(-1) = [(1,0,1),(0,1,0)]$. Se $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e $T(x,y,z) = (a,b,c)$, então podemos afirmar que $a+b+c$ é igual a

(a) $-x + y - z$.
(b) $-x - y - z$.
(c) $x - y - z$.
(d) $-x + y + z$.
(e) $-x - y + z$.

Q10. Se $A \in M_3(\mathbb{R})$ é uma matriz que satisfaz $M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, onde $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, então a solução do sistema $X'(t) = AX(t)$ que verifica $X(0) = (1,2,3)$ é

(a) $X(t) = (e^{-t}, 2e^t + e^{-t}, 3e^t)$.
(b) $X(t) = (e^{-t}, e^t + e^{-t}, 2e^t + e^{-t})$.
(c) $X(t) = (e^{-t}, e^t + e^{-t}, e^t + 2e^{-t})$.
(d) $X(t) = (e^{-t}, 2e^{-t}, 2e^t + e^{-t})$
(e) $X(t) = (e^t, e^t + e^{-t}, 2e^t + e^{-t})$.

Q11. Considere $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear simétrico com autovalores 0 e 1 e que satisfaz $\mathrm{Ker}(T) = [(-1,1,1),(-1,1,-1)]$. Então, uma matriz ortogonal $M \in M_3(\mathbb{R})$ que verifica $M^{\mathrm{t}}[T]_{\mathbf{can}}M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é

(a) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$.

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$.

Q12. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e seja $T\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ o operador linear definido por

$$T(z_1, z_2) = \big(az_1 + (a^2+b^2)z_2, -z_1 - az_2\big), \quad \text{para todo } (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Podemos afirmar que T é diagonalizável se, e somente se,

(a) $b > 0$.

(b) $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

(c) $b \neq 0$.

(d) $b \geq 0$.

(e) $a \neq 0$.

Q13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & -a & 0 \end{bmatrix}$. Podemos afirmar que A é diagonalizável sobre $\mathbb{C}$ se, e somente se,

(a) $a \neq b$.
(b) $a = b$.
(c) $a = 0$.
(d) $a \neq 0$ ou $a = b = 0$.
(e) $a = 0$ e $b \neq 0$.

Q14. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$ com produto interno e seja B uma base de V. Seja $T\colon V \to V$ um operador linear com polinômio característico p_T. Considere as seguintes afirmações:

(I) O operador T é simétrico se, e somente se, todas as raízes de p_T são reais.
(II) O operador T é simétrico se, e somente se, T é diagonalizável.
(III) O operador T é simétrico se, e somente se, a matriz $[T]_B$ é simétrica.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.
(b) Apenas as afirmações (I) e (II) são falsas.
(c) As afirmações (I), (II) e (III) são falsas.
(d) Apenas a afirmação (III) é falsa.
(e) Apenas as afirmações (II) e (III) são falsas.

Q15. Seja n um inteiro positivo e seja $T\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ um operador linear de $\mathbb{C}^n$ como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Considere as seguintes afirmações:

(I) Se $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$ e $a + bi$ é um autovalor de T, então $a - bi$ também é um autovalor de T.

(II) Se n é ímpar, então T tem pelo menos um autovalor real.

(III) Se $[T]_{\mathbf{can}} \in M_n(\mathbb{R})$ e $u + vi$ é um autovetor de T, com $u, v \in \mathbb{R}^n$, então $u - vi$ também é um autovetor de T.

Assinale a alternativa correta.

(a) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.

(b) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.

(c) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

(d) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.

(e) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.

Q16. Sejam $B = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ e $C = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^3$. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ e seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$[T]_{BC} = \begin{bmatrix} a & 3 & -c \\ a & b & 0 \\ 0 & c & c \end{bmatrix}.$$

Considerando $\mathbb{R}^3$ munido do produto interno usual, podemos afirmar que T é um operador simétrico se, e somente se,

(a) $a - b - c = 2$.

(b) $a - b - c = 3$.

(c) $a + b - c = 3$.

(d) $a + b + c = 3$.

(e) $a - b + c = 3$.