1ª Questão: (3,0) Calcule A^{50}, onde

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solução.

Cálculo de autovalores: $p_A(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} -x & 0 & 1 \\ -1 & 1-x & 0 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix}$

$= -x(1-x)^2 - 1 + (1-x) = -x(x^2 - 2x + 2)$

Autovalores: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1+i$, $\lambda_3 = 1-i$

Cálculo de autovetores:

$\lambda_1 = 0$: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} z_3 = 0 \\ z_1 - z_2 = 0 \end{cases}$

$v_1 = (1, 1, 0)$

$\lambda_2 = 1+i$: $\begin{pmatrix} -1-i & 0 & 1 \\ -1 & -i & 0 \\ -1 & 1 & -i \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & -1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} z_1 + i z_2 = 0 \\ (-1+i) z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$

$v_2 = (-i, 1, 1-i)$

$\lambda_3 = 1-i = \overline{\lambda_2} \Rightarrow v_3 = \overline{v_2} = (i, 1, 1+i)$

Cálculo da matriz M: $M^{-1}AM = S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{Re}\lambda_3 & \operatorname{Im}\lambda_3 \\ 0 & -\operatorname{Im}\lambda_3 & \operatorname{Re}\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

onde $M = \begin{pmatrix} \boxed{v_1} & \boxed{\operatorname{Re} v_3} & \boxed{\operatorname{Im} v_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Temos $M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Agora $S^{50} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{50}$}} \\ 0 & & \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (P)_{\{1,i\}}, \quad P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad P(z) = (1+i)z$$

$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^{50} = 2^{25}\Big(\underbrace{\cos\frac{25\pi}{2}}_{=0} + i\underbrace{\operatorname{sen}\frac{25\pi}{2}}_{=1}\Big) = i.\alpha, \quad \text{onde } \alpha = 2^{25}.$$

Então $\quad P^{50}(z) = (1+i)^{50} z = i\alpha z \quad$ e $\quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{50} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}$

Assim

$$A^{50} = (MSM^{-1})^{50} = MS^{50}M^{-1}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & \alpha & -\alpha \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{2}$$

$$\therefore \; A^{50} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\alpha & \alpha & \alpha \\ -\alpha & \alpha & -\alpha \\ -2\alpha & 2\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{onde } \alpha = 2^{25} \; //.$$

2ª Questão: (3,0) Resolva o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x_1'(t) = -17x_2(t) \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 6x_2(t) \end{cases}$$

satisfazendo as condições iniciais $x_1(0) = 17$ e $x_2(0) = 7$.

Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tq $[T]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & -17 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = A$

$p_T(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 34$

autovalores de T^c: $\lambda = 3+5i$, $\bar{\lambda} = 3-5i$

$V(3+5i) = \ker(T^c - (3+5i)I) = [(17, -3-5i)]$

$(17, -3-5i) = (17, -3) + i(0, -5)$

Se $u = (17, -3)$ e $v = (0, -5)$ então $B = \{u, -v\}$ é base de $\mathbb{R}^2$,

$[T]_B = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $M = [Id]_{B,can} = \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

Seja $Y(t) = M^{-1}X(t)$. Então $X(t) = MY(t)$ e

$Y'(t) = M^{-1}X'(t) = M^{-1}AX(t) = M^{-1}AMY(t) = [T]_B Y(t)$

Solução geral de $Y'(t) = [T]_B Y(t)$:

$$y_1(t) = c_1 e^{3t}\cos 5t - c_2 e^{3t}\operatorname{sen} 5t$$
$$y_2(t) = c_2 e^{3t}\cos 5t + c_1 e^{3t}\operatorname{sen} 5t.$$

Condição inicial: $X(0) = MY(0)$

$\begin{bmatrix} 17 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1(0) = 1 \\ 5y_2(0) = 7+3 = 10 \Rightarrow y_2(0) = 2. \end{array}$

$\left.\begin{array}{l} 1 = y_1(0) = c_1 \\ 2 = y_2(0) = c_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y_1(t) = e^{3t}\cos 5t - 2e^{3t}\operatorname{sen} 5t \\ y_2(t) = 2e^{3t}\cos 5t + e^{3t}\operatorname{sen} 5t \end{array}$

$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 0 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t}\cos 5t - 2e^{3t}\operatorname{sen} 5t \\ 2e^{3t}\cos 5t + e^{3t}\operatorname{sen} 5t \end{bmatrix}$

logo,

$$x_1(t) = 17e^{3t}(\cos 5t - 2\operatorname{sen} 5t)$$
$$x_2(t) = e^{3t}(7\cos 5t + 11\operatorname{sen} 5t)$$

3ª Questão: (4,0) Determine todos os valores reais para as constantes a e b para os quais a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & -1 \\ b & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é

i) diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;
ii) semi-simples, mas não diagonalizável sobre $\mathbb{R}$;
iii) não semi-simples.

$$p_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & a-t & -1 \\ b & 1 & -t \end{bmatrix} = (1-t)(a-t)(-t) + (1-t) = (1-t)(t^2 - at + 1)$$

Se $a^2 - 4 < 0$, $p_A(t)$ tem raízes não reais e portanto A não é diagonalizável mas é semi-simples pois as três raízes são distintas, $\forall b$

Se $a^2 - 4 > 0$ (ou seja, se $a < -2$ ou $a > 2$), $p_A(t)$ tem 3 raízes reais distintas (uma vez que $t^2 - at + 1$ tem 2 raízes reais distintas cujo produto é 1, portanto são ambas $\neq 1$). Neste caso, A é diagonalizável, $\forall b$.

Se $a = 2$, $p_A(t) = -(t-1)^3$. Como $A \neq 1 \cdot I$, A não é diagonalizável, (e não é semi-simples), $\forall b$

Se $a = -2$, $p_A(t) = (1-t)(t+1)^2$. Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tq $[T]_{can} = A$

$$(x,y,z) \in V(-1) = \mathrm{Ker}(T+I) \iff \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ b & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff x = 0 \text{ e } y = -z$$

$V(-1) = [(0,-1,1)]$. Como $\dim V(-1) = 1 < 2$, A não é diagonalizável (e não é semi-simples), $\forall b$.

<u>Resposta</u>: (i) ($a < -2$ ou $a > 2$) e $\forall b$
(ii) $-2 < a < 2$ e $\forall b$
(iii) ($a = 2$ ou $a = -2$) e $\forall b$