GABARITO P2 - 2010

Álgebra Linear II - MAT2458

1	A
2	A
3	A
4	A
5	A
6	A
7	A
8	A
9	A
10	A
11	A
12	A
13	A
14	A
15	A
16	A

PoliShare

Q1. Seja V um espaço vetorial de dimensão 2 munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e seja $\{v_1, v_2\}$ uma base de V. Considere a função $T : V \to V$ definida por $T(v) = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2$, para todo $v \in V$. Pode-se afirmar que:

(a) T é sobrejetora;

(b) T não é injetora;

(c) T não é linear;

(d) v_1 e v_2 são autovetores de T;

(e) $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

Q2. Sejam $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operadores lineares que são representados na base canônica de $\mathbb{R}^3$ pelas matrizes:

$$[S]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [T]_{\mathrm{can}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considere a base:

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

de $\mathbb{R}^3$. Assinale a alternativa correspondente a um vetor que gera $\mathrm{Ker}(S \circ T)$:

(a) $(0,2,-1)_{\mathcal{B}}$;

(b) $(-1,2,1)_{\mathcal{B}}$;

(c) $(0,1,-2)_{\mathcal{B}}$;

(d) $(0,-1,2)_{\mathcal{B}}$;

(e) $(1,-1,1)_{\mathcal{B}}$.

Q3. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ um produto interno em $\mathbb{R}^3$. Sejam v_1, v_2 e v_3 autovetores de T associados aos autovalores λ_1, λ_2 e λ_3, respectivamente. Se $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$ e $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$, pode-se afirmar que:

(a) T é diagonalizável;

(b) todo autovetor de T é paralelo a v_1, a v_2 ou a v_3;

(c) T é diagonalizável se e somente se os autovalores λ_1, λ_2 e λ_3 são dois a dois distintos;

(d) T não é diagonalizável;

(e) T é diagonalizável se e somente se $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \neq 0$.

Q4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = -t^3 + 3t^2 + t - 6$. Pode-se afirmar que:

(a) não existe um inteiro $n \geq 1$ tal que T^n é o operador identidade;
(b) existe um inteiro $n \geq 1$ tal que T^n é o operador identidade;
(c) existe um inteiro $n \geq 1$ tal que T^n é o operador nulo;
(d) existe um inteiro $n \geq 2$ tal que $T^n = T$;
(e) T não é diagonalizável.

Q5. Recorde que o *traço* $\mathrm{tr}(X)$ de uma matriz quadrada X é a soma dos elementos de sua diagonal principal e que matrizes semelhantes possuem o mesmo traço. Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}).$$

Tem-se que $\mathrm{tr}(A^5 - 2A)$ é igual a:

(a) 27;
(b) $\left(\frac{3}{2}\right)^5 - 1$;
(c) 28;
(d) $\left(\frac{3}{2}\right)^5$;
(e) 26.

Q6. Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ um operador linear com polinômio característico:

$$p_T(t) = -t^a(t - \lambda)^b(t - \mu)^c,$$

onde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ são não nulos e distintos e $a, b, c > 0$ são inteiros. Se:

$$\dim\big(V_\lambda(T)\big) + \dim\big(V_\mu(T)\big) = 4,$$

então:

(a) T é diagonalizável;
(b) T não é diagonalizável pois T não é injetor;
(c) não podemos garantir que T seja diagonalizável;
(d) T não é diagonalizável pois $\dim\big(V_\lambda(T)\big) > \dim\big(V_\mu(T)\big)$;
(e) T é sobrejetor.

Q7. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear cuja matriz em relação à base canônica seja:

$$[T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} -7 & -6 & -12 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico de T é $p_T(t) = -(t+1)^2(t+2)$. Assinale a alternativa correta:

(a) T é diagonalizável;

(b) T não é diagonalizável pois a multiplicidade algébrica do autovalor -1 é 2;

(c) T não é diagonalizável pois a multiplicidade geométrica do autovalor -1 é 1;

(d) T não é diagonalizável pois p_T tem raízes múltiplas;

(e) T não é diagonalizável por não ser injetor.

Q8. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um operador linear com polinômio característico p_T. Se o polinômio característico de T^2 é:

$$p_{T^2}(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0,$$

com $a_0 \neq 0$, pode-se afirmar que:

(a) T é invertível;

(b) T não é injetor;

(c) T não é diagonalizável pois p_T não tem raízes reais;

(d) p_T possui uma raiz complexa não real;

(e) se p_T tiver raízes múltiplas então T não será diagonalizável.

Q9. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

onde:

$$\mathcal{B} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1,0),(0,1)\}.$$

Se $(x,y,z) \in \text{Ker}(T)$ é tal que z é um número inteiro, pode-se afirmar que $x+y+z$ é um múltiplo de:

(a) 9;

(b) 4;

(c) 5;

(d) 6;

(e) 7.

Q10. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},$$

onde:

$$\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

Dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, se $(a,b,c) = T(x,y)$, pode-se afirmar que $a+b+c$ é igual a:

(a) $3x$;
(b) $2x + y$;
(c) $x + 2y$;
(d) $3x + y$;
(e) x.

Q11. Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ a transformação linear tal que:

$$[T]_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{B} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \right\}$ e $\mathcal{C} = \{1, t, t^2\}$. Assinale a alternativa correta:

(a) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$;
(b) T é sobrejetora;
(c) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$;
(d) T é injetora;
(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) + \dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$.

Q12. Seja $T : E \to E$ um operador linear, onde E é um espaço vetorial de dimensão finita. Suponha que $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$ e que $T^2 \neq 0$. Assinale a alternativa correta:

(a) T é diagonalizável;
(b) o polinômio característico de T pode não ter raízes reais;
(c) o polinômio característico de T pode ter alguma raiz complexa não real;
(d) o polinômio característico de T só tem raízes reais e T pode ter um autovalor cuja multiplicidade algébrica é maior do que a multiplicidade geométrica;
(e) o polinômio característico p_T de T só tem raízes reais e pode existir uma raiz $\alpha \in \mathbb{R}$ de p_T tal que a dimensão de $\mathrm{Ker}(T - \alpha \mathrm{I})$ é menor do que a multiplicidade de α como raiz de p_T.

Q13. Considere as seguintes afirmações:

(I) se α é uma raiz real do polinômio característico de um operador linear T num espaço vetorial de dimensão finita então α é um autovalor de T;

(II) é possível encontrar um operador linear T num espaço vetorial de dimensão finita e um autovalor λ de T tal que a dimensão do espaço $\mathrm{Ker}(T - \lambda \mathrm{I})$ seja maior do que a multiplicidade de λ como raiz do polinômio característico de T;

(III) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um operador linear, $\mathcal{B}$ é uma base de $\mathbb{R}^n$, λ é um número real e A é a matriz $[T]_{\mathcal{B}} - \lambda \mathrm{I} \in M_n(\mathbb{R})$ então um vetor não nulo $x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ é autovetor de T com autovalor λ se e somente se:

$$A \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(b) as três afirmações são verdadeiras;

(c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;

(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q14. Sejam E um espaço vetorial de dimensão 3, $T : E \to E$ um operador linear, $\mathcal{B}$ uma base de E e $a, b \in \mathbb{R}$. Sabendo-se que:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix},$$

pode-se afirmar que T **NÃO** é diagonalizável se e somente se:

(a) $a = 0$ e $b \neq 0$;

(b) $a = b$;

(c) $a \neq 0$;

(d) $a = b = 0$;

(e) $b \neq 0$.

Q15. Considere as seguintes afirmações:

(I) a matriz $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ não é semelhante a uma matriz diagonal;

(II) se uma matriz A não é diagonalizável então A^2 também não é diagonalizável;

(III) se $a, b, c \in \mathbb{R}$ então a matriz $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ é diagonalizável.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;

(b) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;

(c) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;

(d) apenas a afirmação (I) é verdadeira;

(e) apenas a afirmação (II) é verdadeira.

Q16. Sejam $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ operadores lineares tais que:

$$S(x, y, z) = (x + y, x + z, y + z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

e tais que a matriz que representa $S \circ T$ na base canônica de $\mathbb{R}^3$ é:

$$[S \circ T]_{\text{can}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pode-se afirmar que o traço da matriz $[T]_{\text{can}}$ (isto é, a soma dos elementos da diagonal principal de $[T]_{\text{can}}$) é igual a:

(a) 1;

(b) 2;

(c) -1;

(d) -2;

(e) 4.