B

1ª Questão: Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear dado por

$$T(x, y, z) = (3x - y + z\ ,\ -x + 3y - z\ ,\ x - y + 3z)\ .$$

a) (0,5 ponto) Verifique que T é simétrico.

b) (2,0 pontos) Encontre uma base **ortonormal** B de $\mathbb{R}^3$ tal que $[T]_B$ seja diagonal.

c) (0,5 ponto) Encontre uma matriz **ortogonal** M (isto é, tal que $M^t = M^{-1}$) tal que $M^t[T]_B M$ seja diagonal.

(a) A matriz de T na base canônica $\underline{can}$ de $\mathbb{R}^3$ é

$$A = (T)_{\underline{can}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Como $\underline{can}$ é ortonormal e $(T)_{\underline{can}}$ é simétrica, T é um operador simétrico.

b) Polinômio característico:

$$p_T(x) = \det(A - xI) = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & 1 \\ -1 & 3-x & -1 \\ 1 & -1 & 3-x \end{vmatrix} = -x^3 + 9x^2 - 24x + 20$$

$$= -(x-2)^2(x-5)$$

Autovalores: 2, 2, 5

Autoespaços e autovetores:

$$V(2) = \ker(T - 2I) \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{x - y + z = 0}$$

$\{v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (1, 0, -1)\}$ é base de $V(2)$

$$V(5) = \ker(T - 5I) \quad \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{escalonamento}} \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$\{v_3 = (1, -1, 1)\}$ é base de $V(5)$

v_3 já é ortogonal a v_1, v_2.

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 = (1, 0, -1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$$

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$e_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ constituída por autovetores de T, logo $(T)_B$ é diagonal.

(c) Seja $M = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$ a matriz de mudança entre can e B. Como estas são bases ortonormais, M é ortogonal.

Além disso,

$$M^{-1} (T)_{can} M = (T)_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

//

B

a) (1,0 ponto) Dê um exemplo de uma matriz diagonalizável que não é simétrica.

b) (1,5 pontos) Seja $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ um operador linear cujo polinômio característico é $p_T(t) = (t^3 - t^2)(t^2 - 4)$ e tal que $dim\ ImT = 3$. Prove que T é diagonalizável.

c) (1,5 pontos) Prove que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} \pi & e & -\pi & e \\ \pi & e & -\pi & e \\ \pi & e & -\pi & e \\ \pi & e & -\pi & e \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 2e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

são semelhantes.

(Se você resolver (c), a matriz do item (a) também serv

(a) Há "muitos" exemplos! (INFINITOS). Tome $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 9 \end{bmatrix}$. É claro que A NÃO é simétrica. Entretanto o polinômio característico de A $p_A(t) = \det \begin{bmatrix} 1-t & 1 \\ 9 & 9-t \end{bmatrix}$ $= (1-t)(9-t) - 9 = t^2 - 10t = t(t-10)$ em 2 raízes distintas e então A é diagonalizável.

(b) $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^5$

Sendo $p_T(t) = (t^3 - t^2)(t^2 - 4) = t^2(t-1)(t-2)(t+2)$ o polinômio característico de T, temos que os autovalores de T são 0, 1, 2 e −2. Como 1, 2 e −2 são raízes simples de $p_T(t)$, temos que suas multiplicidades algébrica e geométrica são iguais.

Como $\dim Im\,T = 3$, vale que $\dim \ker T = 2$ pelo Teorema do Núcleo e da Imagem. Assim $\dim V(0) = \dim \ker(T - 0I) = \dim \ker T = 2 = ma(0)$. Assim T satisfaz as duas condições do TEOREMA e T é diagonalizável.

(c) Seja $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $[T]_{can} = A$.

A imagem de T é o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelas colunas de A e todas elas são múltiplas do vetor (1, 1, 1, 1). Assim $Im\,T = [(1,1,1,1)]$ e então $\dim \ker T = 3$. (Uma base de Im T é $\{(1,1,1,1)\}$.). Sendo assim, 0 é um autovalor de T cuja multiplicidade geométrica é $3 = \dim \ker T = \dim(\ker[T - 0I]) = \dim V(0)$. Como $mg(0) \leq ma(0)$, o polinômio característico de T, $p_T(t)$ é da forma $p_T(t) = t^3(t - \alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Agora, observe que a soma dos elementos de cada uma das linhas da matriz A é igual a $\pi + e - \pi + e = 2e$. Logo $2e$ é um autovalor de T com autovetor associado sendo (1, 1, 1, 1) pois

$$\begin{bmatrix} \pi & e & -\pi & e \\ \pi & e & -\pi & e \\ \pi & e & -\pi & e \\ \pi & e & -\pi & e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e \\ 2e \\ 2e \\ 2e \end{bmatrix} = 2e \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Então $p_T(t) = t^3(t - 2e)$ e T é diagonalizá pois $ma(0) = mg(0) = 3$ e $ma(2e) = mg(2e) =$ Existe então uma base B de $\mathbb{R}^4$ tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 2e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D.$$

Como D e A são matrizes da mesma transformação linear, elas são semelhantes.

3ª Questão:

a) (1,5 pontos) Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n e seja $T : V \to V$ um operador linear tal que $T^2 = T$. Prove que existe uma base B de V tal que

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

A e B

onde o número de 1's na diagonal da matriz é *dim ImT*.

b) (1,5 pontos) Sejam E , $F \in M_n(\mathbb{R})$ matrizes tais que $E^2 = E$ e $F^2 = F$. Mostre que E e F são semelhantes se, e somente se, têm o mesmo posto.

(**Observação:** O posto de uma matriz é a dimensão do subespaço de $\mathbb{R}^n$ gerado pelas colunas da matriz).

3) (a) Vamos provar inicialmente, que

$V = \ker T \oplus \operatorname{Im} T$.

(i) $V = \ker T + \operatorname{Im} T$

Seja $v \in V$. Então $v = v - Tv + Tv$, onde

$v - Tv \in \ker T$, pois $T(v - Tv) = Tv - T^2 v = Tv - Tv =$

(ii) $\ker T \cap \operatorname{Im} T = \{0\}$.

Seja $v \in \ker T \cap \operatorname{Im} T$.

Por um lado $v = Tu$, pois $v \in \operatorname{Im} T$. Por outro $Tv = T^2 u = Tu = v = 0$ pois $v \in \ker T$.

(iii) Seja $B_1 = \{v_1, \dots, v_r\}$ uma base da $\operatorname{Im} T$ e

$B_2 = \{v_{r+1}, \dots, v_n\}$ uma base do $\ker T$. Então

$B = B_1 \cup B_2$ é base de V, $Tv_1 = v_1, \dots, Tv_r = v_r$,

$Tv_{r+1} = 0, \dots, Tv_n = 0$ e

$$[T]_B = \begin{bmatrix} I_{r \times r} & 0 \\ 0 & 0_{n-r, n-r} \end{bmatrix}$$

b) Se E e F são semelhantes $\Rightarrow$ E e F tem o mesmo posto.

Se E e F são semelhantes então E e F são matrizes da mesma transformação linear $T: V \to V$, só que em bases diferent

Como o posto de T é o número de elementos da base da Im T, então posto E = posto F.

Se E e F tem o mesmo posto, então E e F são semelhantes

Sejam S e T transformações lineares do $\mathbb{R}^n$ dadas por

$$S: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad e \quad T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

$$[S]_{can} = S \qquad [T]_{can} = T$$

Pela parte (a) existem bases B_1 e B_2 do $\mathbb{R}^n$ tais que

$$[S]_{B_1} = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & 0 \\ 0 & 0_{n-r,n-r} \end{bmatrix} = [T]_{B_2}$$

Sejam $Can \xrightarrow{P} B_1$ e $Can \xrightarrow{Q} B_2$ as matri de mudança. Então

$$P^{-1}SP = Q^{-1}TQ, \text{ ou}$$

$$S = PQ^{-1}TQP^{-1} = (QP^{-1})^{-1}T(QP^{-1}).$$

Logo S e T são semelhantes.