GABARITO P1 - 2012

Álgebra Linear II - MAT2458

1	C
2	B
3	A
4	C
5	C
6	D
7	C
8	D
9	D
10	E
11	C
12	C
13	B
14	D
15	C
16	A

Enviado para www.polishare.com.br

Nesta prova, se $\mathbf{V}$ denota um espaço vetorial, o vetor nulo de $\mathbf{V}$ é denotado por $\mathbf{0_V}$. O subespaço de $\mathbf{V}$ gerado pelos vetores $\mathbf{v_1, \ldots, v_n} \in \mathbf{V}$ é denotado por $\mathbf{[v_1, \ldots, v_n]}$. Se o espaço vetorial $\mathbf{V}$ está munido de um produto interno e $\mathbf{S}$ é um subespaço de $\mathbf{V}$, a projeção ortogonal de um vetor $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ sobre $\mathbf{S}$ é denotada por $\mathbf{proj_S\, v}$. Se $\mathbf{A} = (\mathbf{a_{ij}})_{\mathbf{n \times n}}$ é uma matriz $\mathbf{n \times n}$ então o traço de $\mathbf{A}$ é definido por $\mathbf{tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}}$.

Q1. Considere o espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Se $S = [1-t, 1-t^2] \subset P_2(\mathbb{R})$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ então $\alpha - \beta t + t^2 \in S^\perp$ se e somente se:

(a) $\alpha = -2$ e $\beta = 2$;
(b) $\alpha = 0$ e $\beta = 0$;
(c) $\alpha = 0$ e $\beta = 2$;
(d) $\alpha = 2$ e $\beta = -2$;
(e) $\alpha = 0$ e $\beta = -2$.

Q2. Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $T : M_{4\times1}(\mathbb{R}) \to M_{4\times1}(\mathbb{R})$ o operador linear definido por:

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}, \quad x, y, z, t \in \mathbb{R}.$$

Pode-se afirmar que T é injetor se e somente se:

(a) $a \neq -b$ e $c \neq d$;
(b) $a \neq b$ e $c \neq -d$;
(c) $a \neq b$ ou $c \neq -d$;
(d) $a \neq -b$ ou $c \neq d$;
(e) $a \neq b$ e $c \neq d$.

Q3. Considere as seguintes afirmações:

(I) a igualdade:

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^{\mathrm{t}}A), \quad A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$$

define um produto interno em $M_{m\times n}(\mathbb{R})$;

(II) dados $t_1, t_2, t_3, t_4 \in \mathbb{R}$, com $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$, vale que a igualdade:

$$\langle p, q\rangle = p(t_1)q(t_1) + p(t_2)q(t_2) + p(t_3)q(t_3) + p(t_4)q(t_4), \quad p, q \in P_4(\mathbb{R})$$

define um produto interno em $P_4(\mathbb{R})$;

(III) a igualdade:

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t, \quad f, g \in C\big([0,2]\big),$$

define um produto interno em $C\big([0,2]\big)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q4. Seja V um espaço vetorial não nulo munido de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Considere as seguintes afirmações:

(I) para todos $u, v \in V$, vale que:

$$\|u + v\| = \|u\| + \|v\| \iff |\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|;$$

(II) para todos $u, v \in V$, vale que:

$$\|u + v\| = \|u - v\| \iff \langle u, v\rangle = 0;$$

(III) para todos $u, v \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se $v = \lambda u$ então $|\langle u, v\rangle| = \|u\|\|v\|$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(b) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(c) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.

Q5. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ munido do produto interno canônico. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e S o subespaço de $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = [(1, a, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (1, 0, b, 1)].$$

Pode-se afirmar que $\dim(S^\perp) = 1$ se e somente se:

(a) $a - b \neq 0$;
(b) $a + b = 0$;
(c) $a + b \neq 0$;
(d) $a \neq 0$ e $b \neq 0$;
(e) $a - b = 0$.

Q6. Seja V um espaço vetorial não nulo de dimensão finita munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Sejam S um subespaço de V e $z \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) a transformação $T : V \to \mathbb{R}$ definida por $T(v) = \langle v, v \rangle$, para todo $v \in V$, é linear;
(II) a transformação $T : V \to \mathbb{R}$ definida por $T(v) = \langle v, z \rangle$, para todo $v \in V$, é linear;
(III) a transformação $T : V \to V$ definida por $T(v) = v - \text{proj}_S\, v$, para todo $v \in V$, é linear.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (III) são verdadeiras;
(b) apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras;
(c) todas as afirmações são verdadeiras;
(d) apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras;
(e) apenas a afirmação (III) é verdadeira.

Q7. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Seja $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ um conjunto ortogonal, onde e_1, $\ldots$, e_n são vetores não nulos e distintos de V. Pode-se afirmar que:

$$v = \langle v, e_1 \rangle e_1 + \langle v, e_2 \rangle e_2 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n, \quad \text{para todo } v \in V,$$

se e somente se:

(a) $\mathcal{B}$ é uma base ortogonal de V;
(b) $\mathcal{B}$ gera V;
(c) $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de V;
(d) $\dim(V) = n$;
(e) $\mathcal{B}$ é uma base de V.

Q8. Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o único operador linear tal que:

$$T(1,0,0) = (1,a,0), \quad T(0,1,0) = (0,1,a), \quad T(0,0,1) = (1,0,-a).$$

Temos que T é sobrejetor se e somente se:

(a) $a \neq -1$, $a \neq 0$ e $a \neq 1$;
(b) $a \neq 0$ e $a \neq -1$;
(c) $a \neq 0$ ou $a \neq 1$;
(d) $a \neq 0$ e $a \neq 1$;
(e) $a \neq 0$ ou $a \neq -1$.

Q9. Seja $T : P_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a única transformação linear tal que:

$$T(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad T(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T(t^2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assinale a alternativa correta:

(a) $\mathrm{Ker}(T) = [1 + t - t^2]$ e $\mathrm{Im}(T) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\right]$;
(b) $\mathrm{Ker}(T) = [1 - t + t^2]$ e $\mathrm{Im}(T) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right]$;
(c) $\mathrm{Ker}(T) = [1 - t - t^2]$ e $\mathrm{Im}(T) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right]$;
(d) $\mathrm{Ker}(T) = [-1 + t + t^2]$ e $\mathrm{Im}(T) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)\right]$;
(e) $\mathrm{Ker}(T) = [-1 - t + t^2]$ e $\mathrm{Im}(T) = \left[\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right]$.

Q10. Considere as seguintes afirmações:

(I) se E é um espaço vetorial de dimensão 7 então existe um operador linear $T : E \to E$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$;
(II) se E é um espaço vetorial de dimensão 8 então existe um operador linear $T : E \to E$ tal que $\mathrm{Ker}(T) = \mathrm{Im}(T)$;
(III) existe uma transformação linear injetora $T : M_{2\times 3}(\mathbb{R}) \to P_4(\mathbb{R})$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas as afirmações (I) e (II) são falsas;
(b) apenas as afirmações (II) e (III) são falsas;
(c) apenas a afirmação (III) é falsa;
(d) todas as afirmações são falsas;
(e) apenas as afirmações (I) e (III) são falsas.

Q11. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{R})$ munido do produto interno:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(A^{\mathrm{t}}B), \quad A, B \in M_2(\mathbb{R}).$$

Seja S o subespaço de $M_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right].$$

Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Se a projeção ortogonal de $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ sobre S é igual a $\frac{1}{2}\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pode-se afirmar que:

(a) $a - d - 1 = 0$ e $b - c - 1 = 0$;
(b) $a + d - 1 = 0$ e $b + c - 1 = 0$;
(c) $a + d - 1 = 0$ e $b - c + 1 = 0$;
(d) $a + d + 1 = 0$ e $b + c - 1 = 0$;
(e) $a + d + 1 = 0$ e $b - c + 1 = 0$.

Q12. Seja $T : P_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ a transformação linear definida por:

$$T(a + bt + ct^2 + dt^3) = \begin{pmatrix} a + b & b + c \\ b + c & a + d \end{pmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$ e $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$;
(b) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 3$ e $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 1$;
(c) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 1$ e $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 3$;
(d) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 0$ e $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 4$;
(e) $\dim\big(\mathrm{Ker}(T)\big) = 2$ e $\dim\big(\mathrm{Im}(T)\big) = 2$.

Q13. Seja V um espaço vetorial munido de um produto interno. Seja S um subespaço de V de dimensão finita e considere o operador linear $T : V \to V$ definido por $T(v) = \text{proj}_S\, v$, para todo $v \in V$. Considere as seguintes afirmações:

(I) ocorre necessariamente que $V = \text{Ker}(T) \oplus \text{Im}(T)$;
(II) ocorre necessariamente que $V = \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$, mas pode ocorrer que $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) \neq \{0_V\}$;
(III) ocorre necessariamente que $\text{Ker}(T) \cap \text{Im}(T) = \{0_V\}$, mas pode ocorrer que $V \neq \text{Ker}(T) + \text{Im}(T)$.

Assinale a alternativa correta:

(a) apenas a afirmação (II) é verdadeira;
(b) apenas a afirmação (I) é verdadeira;
(c) apenas a afirmação (III) é verdadeira;
(d) todas as afirmações são verdadeiras;
(e) todas as afirmações são falsas.

Q14. Sejam U e V espaços vetoriais de dimensão finita, $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de U e $T : U \to V$ uma transformação linear. Seja:

$$\mathcal{C} = \{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$$

e assuma que os vetores $T(u_1)$, ..., $T(u_n)$ sejam distintos. Assinale a alternativa correta:

(a) se $\mathcal{C}$ é linearmente independente então T é sobrejetora;
(b) se T é sobrejetora então $\mathcal{C}$ é uma base de V;
(c) se T é injetora então $\mathcal{C}$ é uma base de V;
(d) se $\mathcal{C}$ é linearmente independente então T é injetora;
(e) $\mathcal{C}$ é um conjunto gerador de V, possivelmente linearmente dependente.

Q15. Considere o espaço vetorial $\mathbb{R}^6$ munido do produto interno canônico. Seja S o subespaço de $\mathbb{R}^6$ definido por:

$$S = \big\{(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 : a + b + c = 0,\ d + e - f = 0\big\}.$$

Pode-se afirmar que:

(a) $S^\perp = \big\{(x, x, x, -y, -y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$;
(b) $S^\perp = \big\{(x, x, x, -y, y, -y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$;
(c) $S^\perp = \big\{(x, x, x, -y, -y, y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$;
(d) $S^\perp = \big\{(-x, x, -x, y, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$;
(e) $S^\perp = \big\{(x, x, x, y, -y, y) : x, y \in \mathbb{R}\big\}$.

Q16. Considere em $P_2(\mathbb{R})$ o produto interno definido por:

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p, q \in P_2(\mathbb{R}).$$

Se $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $u(t) = a + bt$ é o polinômio de $P_1(\mathbb{R})$ mais próximo de $v(t) = t^2$, então $a + b$ é igual a:

(a) $\frac{2}{3}$;
(b) $-\frac{1}{3}$;
(c) 0;
(d) $-\frac{2}{3}$;
(e) $\frac{1}{3}$.