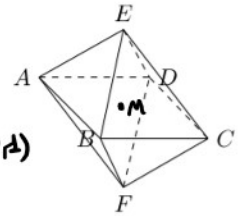
P2 - 2019

sexta-feira, 16 de julho de 2021 17:28

Q1. Considere o octaedro regular (isto é, cujas faces são triângulos equiláteros) de vértices A, B, C, D, E, F, conforme a figura.



1) $\vec{AC} = \vec{AD} + \vec{AB}$

$C = A + (1,0,-1) + (1,0,1)$

$C = (2,0,0)$

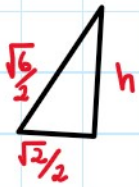
2) $M = \frac{B+D}{2} = \frac{(1,0,1)+(1,0,-1)}{2} = (1,0,0)$

Altura do ABCDE: $(\vec{ME})$

$E = (1,1,0)$ e $F = (1,-1,0)$

$\|\vec{AD}\| = \sqrt{2}$

$h = 1$



Sabendo que $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,1)$, $D = (1,0,-1)$ e que a segunda coordenada de E é positiva, se π é o plano que contém os pontos C, D, F e $P = (a,b,c)$ é o ponto de π mais próximo de E, então $3(a+b+c)$ é igual a

(A) 6
(B) 2
(C) 5
(D) 4
(E) 3

3) $\pi: X = F + \lambda(\vec{FD}) + \mu(\vec{FC})$

$X = (1,-1,0) + \lambda(0,1,-1) + \mu(1,1,0) \Rightarrow -x+y+z+2=0$

Sendo $\vec{u}$ o vetor $\perp$ a π

$\vec{u} = (-1,1,1)$

$r: X = (1,1,0) + \lambda(-1,1,1) \Rightarrow X = (1-\lambda, 1+\lambda, \lambda)$

juntando os amarelos $> -(1-\lambda) + (1+\lambda) + \lambda + 2 = 0$

$\lambda = -2/3$

$X = (5/3, 1/3, -2/3)$ substituindo λ

$\therefore 3(a+b+c) = 4$

Q2. Considere o ponto $P = (-1,1,1)$ e o plano π, definido por

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda + 7\mu \\ y = 1 - 2\lambda + \mu \\ z = \lambda - 5\mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Então, a distância do ponto P ao plano π é igual a

(A) $1/2$
(B) $2/3$
(C) $1/\sqrt{2}$
(D) $4/\sqrt{5}$
(E) $2/\sqrt{3}$

Página 159 do boulos

$d(P,\pi) = \frac{|ax+by+c+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Página 260 do Boulos

$d(P,\pi) = \frac{|9.(-1) + 12(1) + 15(1) - 3|}{\sqrt{81+144+225}}$

$\frac{15}{15\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\pi: X = (-1,1,0) + \lambda(1,-2,1) + \mu(7,1,-5)$

$\therefore \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 1 & -2 & 1 \\ 7 & 1 & -5 \end{vmatrix} = 9x + 12y + 15z - 3$

Q3. Considere as seguintes afirmações sobre vetores arbitrários $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de V^3:

I. A igualdade $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge w) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ é necessariamente válida. ✓

II. Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 3$, então $[\vec{u} - 2\vec{v}, 3\vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}] = 7$. ✗

III. Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é linearmente independente e $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ ✓ é uma base positiva.

Ler página 99 e 131 do Boulos

Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.
(B) III, apenas.
(C) I e III, apenas.
(D) II, apenas.
(E) II e III, apenas.

i) A permutação do sinal não muda o valor

2) $[\vec{u}, 3\vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}] + [-2\vec{v}, 3\vec{v}+\vec{w}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}] =$

$[\vec{u}, 3\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}] + [\vec{u}, \vec{w}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}] + \cancel{[-2\vec{v}, 3\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}+\vec{w}]}^{0} + [-2\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}+\vec{w}+\vec{v}]$

$\cancel{[\vec{u}, 3\vec{v}, \vec{u}]}^{0} + [\vec{u}, \vec{v}\cdot 3, \vec{v}+\vec{w}] + \cancel{[\vec{u}, \vec{w}, \vec{u}]}^{0} + [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}+\vec{w}] + \cancel{[-2\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}]}^{0} + [-2\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}+\vec{v}]$

$\cancel{[\vec{u}, \vec{v}\cdot 3, \vec{v}]}^{0} + [\vec{u}, 3\cdot\vec{v}, \vec{w}] + \cancel{[\vec{u}, \vec{w}, \vec{w}]}^{0} + [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] + \cancel{[-2\vec{v}, \vec{w}, \vec{v}]}^{0} + [-2\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

Eu tinha errado a resolução no arquivo passado, mas aí arrumei agora e deu esse monstro, mas pelo menos tá certo agora.

$[\vec{u}, 3\cdot\vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] + [-2\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

$[\vec{u}, 3\vec{v}+\vec{w}, \vec{v}+\vec{w}] + [-2\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

$[\vec{u}, 3\vec{v}, \vec{v}+\vec{w}] + [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}+\vec{w}] + [-2\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

$[\vec{u}, 3\vec{v}, \vec{w}] + [\vec{u}, \vec{w}, \vec{v}] \cdot -2[\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}]$

$9 - 3 - 2.3 = 0$ //

DDD que me avisou

3) Propriedade simples de produto vetorial

Q4. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 6 \\ \vec{x} \wedge (\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \end{cases},$$

Ler página 110 do Boulos

então o produto abc é igual a

(A) 6
(B) -24
(C) 36
(D) -8
(E) 12

Desenvolvendo a linha de cima:

$a \cdot 1 + b + c = 6$

" de baixo:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (2b-c,\ c-2a,\ a-b) \therefore \begin{cases} 2b-c=1 \\ c-2a=1 \\ a-b=-1 \\ a+b+c=6 \end{cases} \sim \begin{cases} c=3 \\ a=1 \\ b=2 \end{cases}$$

Q5. Dados os pontos $P = (-1, 1, 1)$ e $Q = (2, 1, 3)$ e os vetores $\vec{v} = (2, a, -3)$ e $\vec{w} = (0, b, 0)$, com $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, considere as afirmações abaixo a respeito das retas $r : X = P + \lambda\vec{v}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ e $s : Y = Q + \mu\vec{w}$ $(\mu \in \mathbb{R})$.

I. As retas r e s são sempre reversas, para quaisquer valores de a e $b \neq 0$. ✓

II. Se π é o plano determinado pelo ponto P e pela reta s, então $\vec{v}$ é ortogonal a π se, e somente se, $a = 1$. ✗

III. A distância do ponto Q à reta r é igual a $\sqrt{13}$. ✓

É correto afirmar que

(A) I, II e III são verdadeiras.
(B) apenas II e III são verdadeiras. ✗
(C) apenas I e III são verdadeiras.
(D) I, II e III são falsas.
(E) apenas I e II são verdadeiras.

i) $r: X = P + \lambda(2, a, -3)$

$s: Y = Q + \mu(0, b, 0)$

Como $(\vec{v}, \vec{w})$ é L.I, ou seja, não são proporcionais, as retas não são paralelas.

Agora, precisamos saber se são concorrentes ou reversas. Para isso, verifica-se se são coplanares

ii) $\pi: X = (-1, 1, 1) + \mu \cdot \vec{w} + \lambda \cdot \vec{PQ}$

π:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-1 \\ 0 & b & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = b(2x+1) - b(3z-3)$$

$\therefore 2x - 3z + 4 = 0$

Falso, pois $\vec{n}\ (\perp \pi) = (2, 0, -3)$, que não é L.D. a $\vec{v}$

$$\begin{array}{c} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \\ \vec{PQ} \end{array} \begin{vmatrix} 2 & a & -3 \\ 0 & b & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 4b + 9b = 13b$$

Como $b \neq 0$, então são sempre reversas

iii) $$d(Q, r) = \frac{\|\vec{PQ} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\|(3,0,2) \wedge (2,a,-3)\|}{\|(2,a,-3)\|} = \frac{\|(-2a, 13, 3a)\|}{\|(2,a,-3)\|}$$

$$\frac{\sqrt{13a^2 + 169}}{\sqrt{(13 + a^2)}} = \frac{\sqrt{13(a^2 + 13)}}{\sqrt{13 + a^2}} = \sqrt{13}$$

Q6. O volume do tetraedro de vértices A, B, C, D, em que $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 1)$ e $D = (0, 10, 9)$, é igual a

(A) 1
(B) 1/3
(C) $1/\sqrt{6}$
(D) 1/2
(E) 1/6

$$V = \frac{1}{6} \cdot [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 10 & 9 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot |1| = 1/6$$

Q7. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ uma base positiva de V^3. Suponha que $\|\vec{e_1}\| =$

Q7. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ uma base positiva de V^3. Suponha que $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\|$ e que o vetor $\vec{e_3}$ seja ortogonal a $\vec{e_1}$ e a $\vec{e_2}$. Defina $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$ e $\vec{f_3} = \vec{e_3}$, e seja $\mathcal{C} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$. Considere as seguintes afirmações:

I. $\mathcal{C}$ é uma base ortogonal de V^3.

II. $\mathcal{C}$ é uma base negativa de V^3.

III. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{f_3} = \alpha\, \vec{f_1} \wedge \vec{f_2}$.

Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.

(B) II e III, apenas.

(C) III, apenas.

(D) II, apenas.

(E) I, apenas.

Para ser base, $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ L.I. Então,

$\alpha \vec{f_1} + \beta \vec{f_2} + \gamma \vec{f_3} = \vec{0}$ Tem que ter $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$\alpha(\vec{e_1} + \vec{e_2}) + \beta(\vec{e_1} - \vec{e_2}) + \gamma(\vec{e_3}) = \vec{0}$

$\vec{e_1}(\alpha + \beta) + \vec{e_2}(\alpha - \beta) + \vec{e_3}(\gamma) = \vec{0}$

Como $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ é base

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \therefore \text{base}$$

Para ser negativa, $[\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}] < 0$

Página 128 do Boulos

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \therefore \text{negativa}$$

Para ser ortogonal, $\vec{f_1} \cdot \vec{f_2} = \vec{f_1} \cdot \vec{f_3} = \vec{f_2} \cdot \vec{f_3} = 0$

$(1,1,0) \cdot (1,-1,0) = 0$

$(1,1,0) \cdot (0,0,1) = 0$ $\therefore$ ortogonal

$(1,-1,0) \cdot (0,0,1) = 0$

$\vec{f_1} \wedge \vec{f_2} = (0,0,-2)$

$\vec{f_3} = (0,0,1) \cdot -2 = \vec{f_1} \wedge \vec{f_2}$

Q8. Seja r a reta obtida como interseção dos planos $\pi_1 : x + 2y - 3z = 0$ e $\pi_2 : 2x + y - z = 0$. Uma equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (1, 1, 1)$ e é perpendicular à reta r é

(A) $-x + 4y + 5z - 8 = 0$

(B) $x - 5y - 3z + 7 = 0$

(C) $x + y + z - 3 = 0$

(D) $3x - 5y + 7z - 9 = 0$

(E) $x + 2y + 3z - 6 = 0$

$$r : \begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

A reta r é paralela a ambos os planos.
(1,2,-3) é perpendicular ao plano 1, então perpendicular a r.
(2,1,-1) é perpendicular ao plano 2, então perpendicular a r.
Então, um plano paralelo a (1,2,-3) e (2,1,-1) é obrigatoriamente perpendicular a reta r.

$$X = (1,1,1) + \lambda \underbrace{(1,2,-3)}_{\text{b } \pi_1} + \mu \cdot \underbrace{(2,1,-1)}_{\text{b } \pi_2}$$

$$\text{eq. geral} = \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = x - 5y - 3z + 7 = 0$$

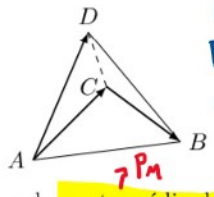
Q9. Dado um tetraedro de vértices A, B, C, D, considere o sistema de coordenadas $\mathcal{R} = (A, \mathcal{F})$ em V^3 de origem A e base $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$, conforme a figura.

$A = (0,0,0)$

$B = (1,1,0)$

$P_m = \frac{D+C}{2} = (0, 1/2, 1/2)$

considere a figura.



$A = (0,0,0)$
$B = (1,1,0)$
$C = (0,1,0)$
$D = (0,0,1)$

$P_M = \frac{D+C}{2} = (0, 1/2, 1/2)$

Seja π o plano que passa pelo ponto médio da aresta CD e é paralelo às arestas AD e BC. Se (a, b, c) são as coordenadas, em relação ao sistema $\mathcal{R}$, do ponto de interseção do plano π com a reta AB, então $a + b + c$ é igual a

(A) 1/3
(B) 1/2
(C) 2
(D) 1
(E) 1/4

$\pi: X = (0, 1/2, 1/2) + \lambda(0,0,1) + \mu(-1,0,0)$

$X = (-\mu, 1/2, 1/2 + \lambda)$

$r: Y = (0,0,0) + \alpha(1,1,0) \rightarrow 1/2(1,1,0) \Rightarrow 1/2 + 1/2 + 0 = 1$

$r \cap \pi: (-\mu, 1/2, 1/2 + \lambda) = \alpha(1,1,0)$

$\therefore \lambda = -1/2, \alpha = 1/2, \mu = -1/2$

Para o ponto desejado, esses são os parâmetros
Então, substituindo lá em cima.

Q10. Seja $b \in \mathbb{R}$. Se a reta $r : \begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$ é paralela ao plano $\pi : bx - 6y + 4z = 5$, então

(A) $b < 2$
(B) $b > 20$
(C) $10 < b < 20$
(D) $5 < b < 10$
(E) $2 < b < 4$

Para $x = 0$: $\begin{cases} z = y \\ z = -4 - y \end{cases} \sim \begin{cases} y = -2 \\ z = -2 \end{cases}$ $(0, -2, -2)$

$y = 0$ $\begin{cases} z = -5x \\ x = 4 + z \end{cases} \sim \begin{cases} z = -15/2 \\ x = 3/2 \end{cases}$ $(3/2, 0, -15/2)$

$\rangle (3/2, 2, -11/2)$

Prod. escalar $= 0$

$r: (0, -2, -2) + \lambda(3, 4, -11)$

$(b, -6, 4) \cdot (3, 4, -11) = 3b - 24 - 44 = 0$ $\quad 3b = 68$

$b \cong 23$

$\vec{v} \perp \pi$

Se o vetor v é perpendicular a pi, é perpendicular a r. Então, calcula-se o produto escalar entre o vetor v e o vetor diretor de r para achar b. (Deve ter outro jeito pra fazer)

Q11. Seja $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ um conjunto linearmente independente de três vetores em V^3, e seja A um ponto qualquer de E^3. Considere os pontos $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$ e $D = A + \vec{w}$. Então, a área do triângulo de vértices B, C, D é igual a

(A) $\frac{1}{2}(\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w})$

(B) $\frac{1}{2}\|\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})\|$

(C) $\frac{1}{2}\|\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u}\|$

(D) $\frac{1}{2}\|(\vec{u} - \vec{v}) \wedge ((\vec{v} - \vec{w}) \wedge (\vec{w} - \vec{u}))\|$

(E) $\frac{1}{2}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \|\vec{BC} \wedge \vec{BD}\|$$

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot \|(\vec{v} - \vec{u}) \wedge (\vec{w} - \vec{u})\|$$

$$= \frac{1}{2} \|\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u}\|$$

Página 116 do livro do Boulos, exercício 11-34

Para provar o item (a), o primeiro passo é fazer a distributiva:

$$\left(\vec{v} - \vec{u}\right) \wedge \left(\vec{w} - \vec{u}\right) = \vec{v} \wedge \vec{w} - \vec{v} \wedge \vec{u} - \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{u} \wedge \vec{u}$$

Como $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ e

$$-\vec{v} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{v}$$

$$-\vec{u} \wedge \vec{w} = \vec{w} \wedge \vec{u}$$

Temos

$$\left(\vec{v} - \vec{u}\right) \wedge \left(\vec{w} - \vec{u}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u}$$

Q12. Considere o plano π, de equação $x+y+z = 1$, e os pontos $P = (1, 1, 2)$ e $Q = (2, 2, \frac{3}{2})$. Sejam P^* e Q^*, respectivamente, as projeções ortogonais dos pontos P e Q sobre o plano π (ou seja, P^* e Q^* pertencem a π, e as retas PP^* e QQ^* são perpendiculares a π). Qual das seguintes alternativas contém equações que definem a reta que passa por P^* e Q^*?

$P^* = (x, y, z)$

(A) $x = y = \dfrac{z-1}{-2}$

(B) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z}{3}$ ✓

(C) $x = 4y = -8z$

(D) $2x = 3y = -4z$

(E) $x + 1 = y - 2 = \dfrac{2z-4}{3}$

$$\vec{PP^*} = (x, y, z) - (1, 1, 2) = (x-1, y-1, z-2)$$

mas $x - 1 = -y - z$,

$$\vec{PP^*} = (-y-z, y-1, z-2)$$

$$\lambda(1, 1, 1) = (-y-z, y-1, z-2)$$

$$\begin{cases} -y-z = \lambda \\ y-1 = \lambda \\ z-2 = \lambda \end{cases} \sim \begin{cases} \lambda = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad \therefore \vec{PP'} = (-1, -1, -1) \quad P' = (0, 0, 1)$$

Então $\overline{P'Q'} \Rightarrow x = y = \dfrac{z-1}{-2}$

Para $\vec{QQ'} = (\alpha, \beta, \gamma) - (2, 2, 2/3) = (\alpha - 2, \beta - 2, \gamma - 2/3)$

$$(-\beta - \gamma - 1, \beta - 2, \gamma - 2/3) = \mu(1, 1, 1)$$

$$\begin{cases} \mu + \beta + \gamma = -1 \\ \mu - \beta = -2 \\ \mu - \gamma = -2/3 \end{cases} \sim \begin{cases} \mu = -11/9 \\ \beta = 7/9 \\ \gamma = -5/9 \end{cases} \quad \therefore \left(-12/9, 7/9, -5/9\right)$$

Q13. Se b é um número real tal que a interseção dos três planos

$$\pi_1 : x + y + bz = -2(b+1), \quad \pi_2 : x + by + z = b + 2 \quad \text{e} \quad \pi_3 : bx + y + z = b$$

é uma reta, então está correto afirmar que

(A) $0 \leq b < 2$

(B) $-3 \leq b < 0$

(C) $b < -3$

(D) $b \geq 7$

(E) $2 \leq b < 7$

Para os planos formarem uma reta, o sistema de equação tem que ser S.P.I.

Coloca o sistema ali no site matrix calculator

$$\begin{cases} x + y + b \cdot z = -2(b+1) \\ x + by + z = b + 2 \\ bx + y + z = b \end{cases} \sim \left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & -2(b+1) \\ 1 & b & 1 & b+2 \\ b & 1 & 1 & b \end{array}\right|$$

Escalonando para $b=2$,

$\therefore$ S.P.I

$$\left|\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & b & -2b-2 \\ 0 & b-1 & -b+1 & 3b+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right|$$

Q14. A distância entre as retas

$$r : \frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{2} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$$

é igual a

(A) 41

(B) 41/137

(C) 21/137

(D) $21/\sqrt{137}$

(E) $41/\sqrt{137}$

$$r: \begin{cases} x = -3 + 3\lambda \\ y = 9 - 2\lambda \\ z = 8 + 2\lambda \end{cases}$$

$$r: X = \underbrace{(-3, 9, 8)}_{A} + \lambda \underbrace{(3, -2, 2)}_{\vec{u}}$$

Vetor diretor de s:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-2, 1, 2) = \vec{v}$$

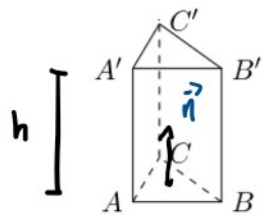
Ponto de s: $x = 0$ $\begin{cases} y = 7/2 \\ z = +4 \end{cases}$ $(0, 7/2, 4) = B$

Vetor $\vec{AB} = (3, \frac{-11}{2}, -4)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-6, -10, -1)$$

$$d = \frac{(3, \frac{-11}{2}, -4) \cdot (-6, -10, -1)}{\sqrt{137}} = \frac{41}{\sqrt{137}}$$

Q15. Considere o prisma triangular reto (isto é, suas bases são triângulos e suas faces laterais são retângulos) de vértices A, B, C, A', B', C', como na figura.



$\vec{AB} = (0,1,0)$

$\vec{AC} = (1,0,1)$

$\vec{n}$ é um vetor na vertical, normal a ABC

$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = (1,0,-1)$

$\|\vec{n}\| = \sqrt{2}$

Sabe-se que $A = (1,0,0)$, $B = (1,1,0)$, $C = (2,0,1)$ e que o volume do prisma é igual a 2. Se a primeira coordenada de A' é positiva, então ela vale

(A) $\sqrt{2}$
(B) 1
(C) $1/\sqrt{2}$
(D) 3
(E) 2

$$\text{Área base} = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$V = 2 = A_b \cdot h \Rightarrow 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot h \Rightarrow h = 2\sqrt{2}$$

versor de $\vec{n}$

$$A' = A + \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \cdot h \Rightarrow A' = (1,0,0) + \frac{(+1,0,-1) \cdot 2\cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} \Rightarrow A' = (3,0,-2)$$

Q16. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e considere as retas

$$r: \begin{cases} x + \alpha y - z = 1 \\ 2x - 3\alpha y + 2z = 5 \end{cases} \quad \text{e} \quad s: \begin{cases} x + y - \beta z = 0 \\ 3x - 2y + \beta z = 1 \end{cases}$$

Então, r e s são ortogonais se, e somente se,

(A) $\alpha\beta + 25\alpha + 16\beta = 0$
(B) $-\alpha\beta + 36\alpha - 25\beta + 9 = 0$
(C) $\alpha^2 - 64\alpha\beta + 96 = 0$
(D) $\alpha^2 - 25\beta + 32 = 0$
(E) $35\alpha + 48\beta = 0$

Vetor diretor de r: $(-\alpha, -4, -5\alpha) = \vec{v}$

Vetor diretor de s: $(-\beta, -4\beta, -5) = \vec{u}$

Para $\vec{v} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = 0$

$$\alpha\beta + 16\beta + 25\alpha = 0$$