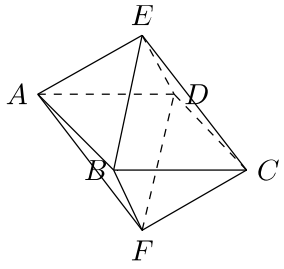
Nesta prova consideram-se fixados uma orientação do espaço V^3 e um sistema de coordenadas $\Sigma = (O, \mathcal{E})$ em E^3, em que $O \in E^3$ denota a origem do sistema Σ e $\mathcal{E} = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal positiva de V^3.

A menos de menção explícita em contrário, equações de retas e de planos e coordenadas de pontos estão escritas no sistema Σ, e coordenadas de vetores estão escritas na base $\mathcal{E}$.

Q1. Considere o octaedro regular (isto é, cujas faces são triângulos equiláteros) de vértices A, B, C, D, E, F, conforme a figura.



Sabendo que $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$, $D = (1, 0, -1)$ e que a segunda coordenada de E é positiva, se π é o plano que contém os pontos C, D, F e $P = (a, b, c)$ é o ponto de π mais próximo de E, então $3(a + b + c)$ é igual a

(A) 6

(B) 2

(C) 5

(D) 4

(E) 3

Q2. Considere o ponto $P = (-1, 1, 1)$ e o plano π, definido por

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda + 7\mu \\ y = 1 - 2\lambda + \mu \\ z = \lambda - 5\mu \end{cases} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Então, a distância do ponto P ao plano π é igual a

(A) $1/2$
(B) $2/3$
(C) $1/\sqrt{2}$
(D) $4/\sqrt{5}$
(E) $2/\sqrt{3}$

Q3. Considere as seguintes afirmações sobre vetores arbitrários $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ de V^3:

I. A igualdade $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge w) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ é necessariamente válida.
II. Se $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 3$, então $[\vec{u} - 2\vec{v}, 3\vec{v} + \vec{w}, \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}] = 7$.
III. Se $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é linearmente independente e $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, então $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base positiva.

Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.
(B) III, apenas.
(C) I e III, apenas.
(D) II, apenas.
(E) II e III, apenas.

Q4. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$ são tais que $\vec{x} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ é a solução do sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 6 \\ \vec{x} \wedge (\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}) = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \end{cases},$$

então o produto abc é igual a

(A) 6
(B) -24
(C) 36
(D) -8
(E) 12

Q5. Dados os pontos $P = (-1, 1, 1)$ e $Q = (2, 1, 3)$ e os vetores $\vec{v} = (2, a, -3)$ e $\vec{w} = (0, b, 0)$, com $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$, considere as afirmações abaixo a respeito das retas $r : X = P + \lambda\vec{v}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ e $s : Y = Q + \mu\vec{w}$ $(\mu \in \mathbb{R})$.

I. As retas r e s são sempre reversas, para quaisquer valores de a e $b \neq 0$.
II. Se π é o plano determinado pelo ponto P e pela reta s, então $\vec{v}$ é ortogonal a π se, e somente se, $a = 1$.
III. A distância do ponto Q à reta r é igual a $\sqrt{13}$.

É correto afirmar que

(A) I, II e III são verdadeiras.
(B) apenas II e III são verdadeiras.
(C) apenas I e III são verdadeiras.
(D) I, II e III são falsas.
(E) apenas I e II são verdadeiras.

Q6. O volume do tetraedro de vértices A, B, C, D, em que $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$, $C = (0,1,1)$ e $D = (0,10,9)$, é igual a

(A) 1
(B) 1/3
(C) $1/\sqrt{6}$
(D) 1/2
(E) 1/6

Q7. Seja $\mathcal{B} = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ uma base positiva de V^3. Suponha que $\|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\|$ e que o vetor $\vec{e_3}$ seja ortogonal a $\vec{e_1}$ e a $\vec{e_2}$. Defina $\vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2}$, $\vec{f_2} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$ e $\vec{f_3} = \vec{e_3}$, e seja $\mathcal{C} = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$. Considere as seguintes afirmações:

I. $\mathcal{C}$ é uma base ortogonal de V^3.
II. $\mathcal{C}$ é uma base negativa de V^3.
III. Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{f_3} = \alpha\, \vec{f_1} \wedge \vec{f_2}$.

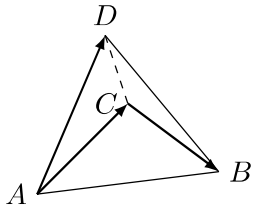
Está correto o que se afirma em

(A) I, II e III.
(B) II e III, apenas.
(C) III, apenas.
(D) II, apenas.
(E) I, apenas.

Q8. Seja r a reta obtida como interseção dos planos $\pi_1 : x + 2y - 3z = 0$ e $\pi_2 : 2x + y - z = 0$. Uma equação geral do plano que passa pelo ponto $P = (1,1,1)$ e é perpendicular à reta r é

(A) $-x + 4y + 5z - 8 = 0$
(B) $x - 5y - 3z + 7 = 0$
(C) $x + y + z - 3 = 0$
(D) $3x - 5y + 7z - 9 = 0$
(E) $x + 2y + 3z - 6 = 0$

Q9. Dado um tetraedro de vértices A, B, C, D, considere o sistema de coordenadas $\mathcal{R} = (A, \mathcal{F})$ em V^3 de origem A e base $\mathcal{F} = \{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$, conforme a figura.



Seja π o plano que passa pelo ponto médio da aresta CD e é paralelo às arestas AD e BC. Se (a, b, c) são as coordenadas, em relação ao sistema $\mathcal{R}$, do ponto de interseção do plano π com a reta AB, então $a + b + c$ é igual a

(A) $1/3$
(B) $1/2$
(C) 2
(D) 1
(E) $1/4$

Q10. Seja $b \in \mathbb{R}$. Se a reta $r : \begin{cases} 5x - y + z = 0 \\ x - y - z = 4 \end{cases}$ é paralela ao plano $\pi : bx - 6y + 4z = 5$, então

(A) $b < 2$
(B) $b > 20$
(C) $10 < b < 20$
(D) $5 < b < 10$
(E) $2 < b < 4$

Q11. Seja $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ um conjunto linearmente independente de três vetores em V^3, e seja A um ponto qualquer de E^3. Considere os pontos $B = A + \vec{u}$, $C = A + \vec{v}$ e $D = A + \vec{w}$. Então, a área do triângulo de vértices B, C, D é igual a

(A) $\frac{1}{2}(\vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{w})$

(B) $\frac{1}{2}\|\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})\|$

(C) $\frac{1}{2}\|\vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{w} + \vec{w} \wedge \vec{u}\|$

(D) $\frac{1}{2}\|(\vec{u} - \vec{v}) \wedge ((\vec{v} - \vec{w}) \wedge (\vec{w} - \vec{u}))\|$

(E) $\frac{1}{2}|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$

Q12. Considere o plano π, de equação $x+y+z = 1$, e os pontos $P = (1, 1, 2)$ e $Q = (2, 2, \frac{3}{2})$. Sejam P^* e Q^*, respectivamente, as projeções ortogonais dos pontos P e Q sobre o plano π (ou seja, P^* e Q^* pertencem a π, e as retas PP^* e QQ^* são perpendiculares a π). Qual das seguintes alternativas contém equações que definem a reta que passa por P^* e Q^*?

(A) $x = y = \dfrac{z-1}{-2}$

(B) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z}{3}$

(C) $x = 4y = -8z$

(D) $2x = 3y = -4z$

(E) $x + 1 = y - 2 = \dfrac{2z-4}{3}$

Q13. Se b é um número real tal que a interseção dos três planos

$\pi_1 : x + y + bz = -2(b+1), \quad \pi_2 : x + by + z = b + 2 \quad \text{e} \quad \pi_3 : bx + y + z = b$

é uma reta, então está correto afirmar que

(A) $0 \leq b < 2$
(B) $-3 \leq b < 0$
(C) $b < -3$
(D) $b \geq 7$
(E) $2 \leq b < 7$

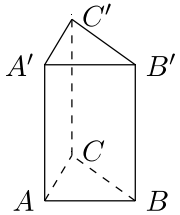
Q14. A distância entre as retas

$$r : \frac{x+3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{2} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2y - z = 3 \end{cases}$$

é igual a

(A) 41
(B) $41/137$
(C) $21/137$
(D) $21/\sqrt{137}$
(E) $41/\sqrt{137}$

Q15. Considere o prisma triangular reto (isto é, suas bases são triângulos e suas faces laterais são retângulos) de vértices A, B, C, A', B', C', como na figura.



Sabe-se que $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (2, 0, 1)$ e que o volume do prisma é igual a 2. Se a primeira coordenada de A' é positiva, então ela vale

(A) $\sqrt{2}$
(B) 1
(C) $1/\sqrt{2}$
(D) 3
(E) 2

Q16. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, e considere as retas

$$r : \begin{cases} x + \alpha y - z = 1 \\ 2x - 3\alpha y + 2z = 5 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad s : \begin{cases} x + y - \beta z = 0 \\ 3x - 2y + \beta z = 1 \end{cases} .$$

Então, r e s são ortogonais se, e somente se,

(A) $\alpha\beta + 25\alpha + 16\beta = 0$
(B) $-\alpha\beta + 36\alpha - 25\beta + 9 = 0$
(C) $\alpha^2 - 64\alpha\beta + 96 = 0$
(D) $\alpha^2 - 25\beta + 32 = 0$
(E) $35\alpha + 48\beta = 0$