Temos então o sistema

$$\begin{cases} 3 + 2\mu - \lambda = \alpha \\ 1 + 2\mu - 2\lambda = -\alpha \\ 1 \qquad\quad - \lambda = \alpha \end{cases} \sim \begin{matrix} \alpha + \lambda - 2\mu = 3 \\ -\alpha + 2\lambda - 2\mu = 1 \\ \alpha + \lambda \qquad\quad = 1 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{cases} \alpha + \lambda = 1 \\ 2\mu = -2 \\ 3\lambda - 2\mu = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha + \lambda = 1 \\ 3\lambda - 2\mu = 2 \\ 2\mu = -2 \end{cases}$$

$\boxed{\mu = -1}$ $\quad 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

(e $\alpha = 1$)

Assim, $P = (0,1,0) \in r$
$Q = (1,0,1) \in s$

A reta t é a reta determinada por P e Q

$$\boxed{X = (0,1,0) + \lambda(1,-1,1), \ \lambda \in \mathbb{R}}$$

B

2ª Questão: Seja $\sum = (O, E)$ um sistema de coordenadas ortogonal. Sejam $r : X = (0, 1, m) + \lambda(1, 2, m+1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $s : X = (1, 2, 3) + \lambda(m, 2, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

(a) (1,5) Estude, segundo os valores de m, a posição relativa das retas r e s.

(b) (1,0) Seja agora $m = 0$. Determine uma equação vetorial para a reta t perpendicular a r e s simultaneamente.

(a) As retas r e s são coplanares se, e somente se, para $P \in r$, $Q \in s$, os vetores $\overrightarrow{PQ}$, $(1, 2, m+1)$ e $(m, 2, 2)$ são LD. Tomando $P = (0, 1, m) \in r$ e $Q = (1, 2, 3) \in s$, $\overrightarrow{PQ} = (1, 1, 3-m)$. Assim, $\overrightarrow{PQ}$, $(1, 2, m+1)$ e $(m, 2, 2)$ são

$$LD \iff \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3-m \\ 1 & 2 & m+1 \\ m & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\iff m^2 - 3m + 2 = 0 \iff m = 1 \text{ e } m = 2.$$

Se $\underline{m = 1}$: $r: X = (0, 1, 1) + \lambda(1, 2, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$s: X = (1, 2, 3) + \lambda(1, 2, 2)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

r e s são paralelas distintas (veja que $(0,1,1) \notin s$, por exemplo)

Se $\underline{m = 2}$: $r: X = (0, 1, 2) + \lambda(1, 2, 3)$ $\lambda \in \mathbb{R}$.
$s: X = (1, 2, 3) + \lambda(2, 2, 2)$

r e s são concorrentes (em $P = (0, 1, 2)$)

Se $m \neq 1$ e $m \neq 2$ r e s são retas reversas.

(b) $m = 0$

$r: X = (0, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1)$ $\lambda \in \mathbb{R}$
$s: X = (1, 2, 3) + \lambda(0, 2, 2)$ $\lambda \in \mathbb{R}$

r e s são retas reversas (por (a))

Achar uma reta cujo vetor diretor $\vec{w}$ seja ortogonal a $(1, 2, 2)$ e a $(0, 2, 2)$. Então $\vec{w} \parallel (1, 2, 1) \wedge (2, 2, 0)$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}. \text{ Logo } \vec{w} \parallel (1, -1, 1)$$

Como a reta é perpendicular a r e a s, ela é determinada por $P \in r$ e $Q \in s$ e $\overrightarrow{PQ} \parallel (1, -1, 1)$.

$$\left.\begin{array}{l} P = (\lambda, 1+2\lambda, \lambda) \\ Q = (1, 2+2\mu, 3+2\mu) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (1-\lambda, 2\mu - 2\lambda + 1, 3 + 2\mu - \lambda)$$

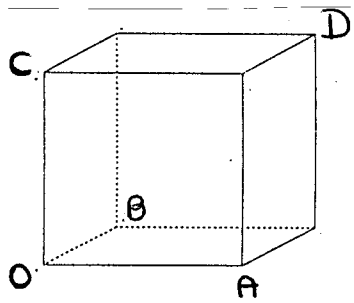
Fazemos $\overrightarrow{PQ} = \alpha(1, -1, 1)$.

Temos o sistema: $\begin{cases} 1 - \lambda = \alpha \\ 2\mu - 2\lambda + 1 = -\alpha \\ 3 + 2\mu - \lambda = \alpha \end{cases}$ Resolvendo, encontramos $\mu = -1$ $(\lambda = 0$ e $\alpha = 1)$

Assim: $t: X = (1, 0, 1) + \lambda(1, -1, 1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Gabarito A e B

3ª Questão: A figura representa um cubo unitário. Considere o sistema de coordenadas $\sum = (O, E)$ onde $E = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$.



(a) (0,5) Escreva uma equação para a reta OD.

(b) (1,0) Escreva uma equação para o plano π que contém a reta AC e é paralelo à reta OD.

(c) (1,0) Determine a distância entre OD e π.

a) $\overrightarrow{OD} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (1,1,1)_E$; $O = (0,0,0)_E$

$\Rightarrow X = (0,0,0) + \lambda(1,1,1)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. equação vetorial

b) $A = (1,0,0)_E$, $C = (0,0,1)_E$, $\overrightarrow{AC} = (-1,0,1)_E$

$\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{OD}$ são vetores diretores de π.

$\Rightarrow X = (1,0,0) + \lambda(-1,0,1) + \mu(1,1,1)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

equação vetorial de π.

c) Considere o plano τ t.q. $\tau \parallel \pi$ e contem OD.

Achamos um vetor normal à π: $\vec{n} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OD}] =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 2, -1)_E \Rightarrow$$

τ: $-1(x) + 2 \cdot y - z = 0 \Rightarrow x - 2y + z = 0$.

A distância entre reta OD e π igual a distância entre π e τ e é igual a distância entre A e τ. A reta r que passa por A e é ~~paralela~~ $\perp \tau$: $X = (1,0,0) + v(-1,2,-1)$, $v \in \mathbb{R}$

Finalmente: $M = r \cap \tau$: $\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ X = (1,0,0) + v(-1,2,-1) \end{cases} \Rightarrow M = (\frac{5}{6}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$

$\Rightarrow$ distância $= \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

4ª Questão: (a) (1,5) Encontre os valores de a tais que o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} ax + 2y = 6 \\ 3x - y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

seja (i) unitário, (ii) vazio e (iii) infinito.

(b) (1,5) Encontre o conjunto solução do sistema abaixo usando escalonamento.

$$\begin{cases} 2x - 4y + 7z + 4v - 5w = 0 \\ x + y + z + 3v - w = 1 \\ x + 2z + v = 2 \end{cases}$$

(a) Resolvendo o sistema $\begin{cases} 3x - y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ temos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{array}\right).$$ Assim $-4y = -2$,

logo $y = \frac{1}{2}$ e $x = -y = -\frac{1}{2}$.

Substituindo na 1ª equação temos: $-\frac{a}{2} + 2\,\frac{1}{2} = 6$, daí $a = -10$

Com isso: (i) $a = -10$; (ii) $a \neq -10$; (iii) não existe a.

(b) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -4 & 7 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 7 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 5 & -2 & -3 & -2 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & -9 & -8 \end{array}\right) \end{array}.$$ Assim $-z + 10v - 9w = -8$,

logo $z = 10v - 9w + 8$

$-y + z - 2v + w = 1 \Rightarrow y = z - 2v + w - 1 = 10v - 9w + 8 - 2v + w - 1$

$= 8v - 8w + 7$

$x + y + z + 3v - w = 1 \Rightarrow x = -y - z - 3v + w + 1$

$= -8v + 8w - 7 - 10v + 9w - 8 - 3v + w + 1$

$= -21v + 18w - 14$

Logo o conjunto solução do sistema é:

$S = \{(-21v + 18w - 14,\ 8v - 8w + 7,\ 10v - 9w + 8,\ v, w) \,/\, v, w \in \mathbb{R}\}$

B

4ª Questão: (a) (1,5) Encontre os valores de a tais que o conjunto solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + ay = 6 \\ x - 3y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

seja (i) unitário, (ii) vazio e (iii) infinito.

(b) (1,5) Encontre o conjunto solução do sistema abaixo usando escalonamento.

$$\begin{cases} -4x + 2y + 7z + 4v - 5w = 0 \\ x + y + z + 3v - w = 1 \\ y + 2z + v = 2 \end{cases}$$

(a) Resolvendo o sistema $\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases}$ temos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 \end{array}\right)$$ daí $4y = -2$, logo $y = -\frac{1}{2}$ e $x = -y = \frac{1}{2}$

Substituindo na 1ª equação temos: $2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{a}{2} = 6$, daí $a = -10$.

Com isso: (i) $a = -10$; (ii) $a \neq -10$; (iii) não existe a.

(b) $$\left(\begin{array}{ccccc|c} -4 & 2 & 7 & 4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & 7 & 4 & -5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 11 & 16 & -9 & 4 \end{array}\right)$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & y & z & v & w \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 10 & -9 & -8 \end{array}\right) \end{array}$$

Assim $-z + 10v - 9w = -8$,

logo $z = 10v - 9w + 8$

$y + 2z + v = 2 \Rightarrow y = -2z - v + 2 = -20v + 18w - 16 - v + 2$

$= -21v + 18w - 14$

$x + y + z + 3v - w = 1 \Rightarrow x = -y - z - 3v + w + 1$

$= 21v - 18w + 14 - 10v + 9w - 8 - 3v + w + 1$

$= 8v - 8w + 7$

Logo o conjunto solução é:

$S = \{(8v - 8w + 7, -21v + 18w - 14, 10v - 9w + 8, v, w) \mid v, w \in \mathbb{R}\}$

2ª Prova de Álgebra Linear para Engenharia I - MAT 2457
18/05/2005

B

Nome : _____
N°USP : _____
Professor(a) : _____
Turma : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS

1ª Questão: (2,0) Seja $\sum = (O, E)$ um sistema de coordenadas ortogonal e sejam:

$A = (1, 2, 1)$ e $B = (-4, 0, 1)$.

(a) Encontre uma equação vetorial da reta r determinada por A e B.

(b) Encontre uma equação geral para o plano π que passa pela origem e é perpendicular à reta r.

(a) Se $A = (1,2,1)$ e $B = (-4,0,1)$ então um vetor diretor para r pode ser:

$\vec{AB} = (-5, -2, 0)$. e portanto:

$r: X = A + \lambda \vec{AB} \Rightarrow$

$X = (1,2,1) + \lambda(-5,-2,0)$.

(b) Se π é perpendicular a r, $\vec{n}_\pi \parallel \vec{AB}$,

e se X é um ponto de π, temos:

$\vec{OX} \cdot \vec{n} = 0$, assim a equação geral é:

$-5x - 2y = 0$.

A

2ª Questão: Seja $\sum = (O, E)$ um sistema de coordenadas ortogonal. Sejam $r : X = (m, 1, 0) + \lambda(m+1, 2, 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$ e $s : X = (3, 2, 1) + \lambda(2, 2, m),\ \lambda \in \mathbb{R}$

(a) (1,5) Estude, segundo os valores de m, a posição relativa das retas r e s.

(b) (1,0) Seja agora $m = 0$. Determine uma equação vetorial para a reta t perpendicular a r e s simultaneamente.

(a) As retas r e s são coplanares se, e somente se, para $P \in r$ e $Q \in s$ os vetores $\overrightarrow{PQ}$, $(m+1, 2, 1)$ e $(2, 2, m)$ são LD. Agora, tomando $P = (m, 1, 0) \in r$ e $Q = (3, 2, 1) \in s$, $\overrightarrow{PQ} = (3-m, 1, 1)$. Então, $\overrightarrow{PQ}$, $(m+1, 2, 1)$ e $(2, 2, m)$ são LD $\iff \begin{vmatrix} 3-m & 1 & 1 \\ m+1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & m \end{vmatrix} = 0$

$\iff (3-m)[2m-2] - 1(m(m+1)-2) + 1(2m+2-4) = 0$

$\iff 6m - 6 - 2m^2 + 2m - m^2 - m + \cancel{2} + 2m - \cancel{2} = 0$

$\iff -3m^2 + 9m - 6 = 0 \iff m^2 - 3m + 2 = 0$

$\iff \boxed{m = 1}$ e $\boxed{m = 2}$

<u>Conclusão</u>: <u>Para $m = 1$</u> $r: (1,1,0) + \lambda(2,2,1)\ \ \lambda \in \mathbb{R}$
$s: (3,2,1) + \lambda(2,1,1)\ \ \lambda \in \mathbb{R}$

as retas são <u>paralelas</u> <u>distintas</u>. (Note, por exemplo que $(3,2,1) \notin r$)

<u>Para $m = 2$</u> $r: (2,1,0) + \lambda(3,2,1),\ \lambda \in \mathbb{R}$
$s: (3,2,1) + \lambda(2,2,2)\ \ \lambda \in \mathbb{R}$

as retas são <u>concorrentes</u> (em $P = (2,1,0)$)

Para <u>$m \neq 1$ e $m \neq 2$</u>, os vetores $\overrightarrow{PQ}$, $(m+1, 2, 1)$ e $(2, 2, m)$ são LI e r e s são <u>retas reversas</u>.

(b) $m = 0$ $r: X = (0, 1, 0) + \lambda(1, 2, 1)$. r e s são retas reversas.
$s: X = (3, 2, 1) + \lambda(2, 2, 0)$

Queremos uma reta cujo vetor diretor $\vec{w}$ seja tal que $\vec{w} \perp (1,2,1)$ e $\vec{w} \perp (2,2,0)$. Logo $\vec{w} \parallel (1,2,1) \wedge (2,2,0)$

Calculando $(2,2,0) \wedge (1,2,1)$

$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Logo $\vec{w} \parallel (1, -1, 1)$.

A reta t é determinada por $P \in r$, $Q \in s$ tais que $\overrightarrow{PQ} \parallel (1, -1, 1)$.

$\left.\begin{array}{l} P = (\lambda, 1+2\lambda, \lambda) \\ Q = (3+2\mu, 2+2\mu, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (3+2\mu-\lambda, 2\mu-2\lambda+1, 1-\lambda)$

$\overrightarrow{PQ} = \alpha(1, -1, 1)$.