1ª Prova de Álgebra Linear para Engenharia I - MAT 2457
POLI

B

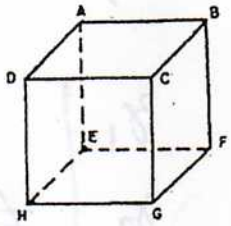
Nome : _____
NºUSP : _____
Professor(a) : _____
Turma : _____

Q	N
1	
2	
3	
Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS

1ª Questão:

(a) (1,5) Seja $ABCDEFGH$ um cubo unitário, e sejam $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{BH}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{BF}$.



Determine para quais valores de μ o conjunto

$$B = \{(\mu - 1)\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \mu\overrightarrow{v_3}\ ,\ 2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + 4\overrightarrow{v_3}\ ,\ 8\overrightarrow{v_1} + (\mu - 2)\overrightarrow{v_2} + 11\overrightarrow{v_3}\}\ .$$

não forma uma base de V^3. Justifique, citando os resultados e teoremas usados.

(b) (1,5) Caso $\mu = 0$, determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v_1}$, em relação a B.

(a) Pela figura acima, $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ são ortogonais, e portanto são LI. Como $\vec{v}_1$ não está no plano gerado por $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_3$ os três vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ são LI. Assim, o conjunto B NÃO é uma base de V^3 se e somente se

$$\begin{vmatrix} \mu-1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & \mu-2 \\ \mu & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0$$

ou seja, se e somente se $2\mu^2 - 11\mu + 9 = 0$
de onde $\mu = 1$ ou $\mu = 9/2$

Justificativa: o teorema usado foi o seguinte:
Seja B uma base fixada, $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ e
sejam $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)_B$ $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)_B$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)_B$
três vetores de V^3. Então esses três vetores
são LI se e somente se

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

(b) Se $\mu = 0$ $B = \{-\vec{v}_1 + \vec{v}_2 ; 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 4\vec{v}_3 , 8\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + 11\vec{v}_3\}$

Se $E = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ então $[\vec{v}_1]_B = M_{E,B}[\vec{v}_1]_E$

Como $M_{B,E} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}$, $M_{E,B} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 11 \end{pmatrix}^{-1}$

$$M_{E,B} = \begin{pmatrix} -\frac{19}{9} & \frac{22}{9} & -4/3 \\ \frac{11}{9} & \frac{11}{9} & -2/3 \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & 1/3 \end{pmatrix}$$

$$M_{E,B} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{[\vec{v}_1]_E} = \begin{pmatrix} -19/9 \\ 11/9 \\ -4/9 \end{pmatrix}$$

1ª Prova de Álgebra Linear para Engenharia I - MAT 2457
POLI

A

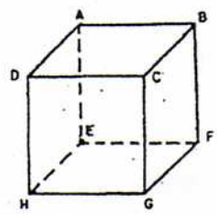
Nome : _____
N°USP : _____
Professor(a) : _____
Turma : _____

Q	N
1	
2	
3	
Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS RESPOSTAS

1ª Questão:

(a) (1,5) Seja $ABCDEFGH$ um cubo unitário, e sejam $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{DG}$ e $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{AG}$.



Determine para quais valores de λ o conjunto

$$B = \{\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} + (\lambda - 1)\overrightarrow{v_3}\ ,\ 2\overrightarrow{v_1} + 3\overrightarrow{v_2} + 4\overrightarrow{v_3}\ ,\ 3\overrightarrow{v_1} + \lambda\overrightarrow{v_2} + 11\overrightarrow{v_3}\}$$

não forma uma base de V^3. Justifique, citando os resultados e teoremas usados.

(b) (1,5) Caso $\lambda = 0$, determine as coordenadas do vetor $\overrightarrow{v_1}$, em relação a B.

As únicas mudanças em relação à prova B são

B não é uma base se e somente se

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \lambda \\ \lambda-1 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\lambda^2 - 15\lambda + 22 = 0$$

raízes $\lambda = 2$ ou $\lambda = 11/2$

(b) $$[\vec{v}_1]_B = M_{E,B}\,[\vec{v}_1]_E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 11 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33/32 \\ -11/32 \\ 7/32 \end{pmatrix}$$

2ª Questão: Seja $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ uma base ortonormal positiva.

(a) (2,5) Dados $\vec{u} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$, $\vec{v} = \vec{e_2} - \vec{e_3}$, construir uma base ortonormal positiva $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ tal que: $\vec{f_1}$ e $\vec{u}$ são paralelos e têm o mesmo sentido, $\vec{f_2}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e $\vec{f_2}.\vec{e_1} > 0$.

(b) (1,0) Dado $\vec{w} = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{3})_F$, expressar $\vec{w}$ na base E.

$$\vec{u} = \vec{e_1} - \vec{e_2} \qquad \vec{v} = \vec{e_2} - \vec{e_3}$$

$$\vec{f_1} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_1} - \vec{e_2}).$$

$$\vec{f_2'} = v - \text{proj}_{\vec{f_1}}\vec{v} = \vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{f_1})\cdot\vec{f_1} =$$

$$= (\vec{e_2} - \vec{e_3}) - ((\vec{e_1} - \vec{e_2})\cdot(\vec{e_2} - \vec{e_3}))\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e_1} - \vec{e_2}).$$

$$= \vec{e_2} - \vec{e_3} + \frac{1}{2}(\vec{e_1} - \vec{e_2})$$

$$\vec{f_2} = \frac{\vec{f_2'}}{\|\vec{f_2'}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}).$$

$$\vec{f_3} = \vec{f_1} \wedge \vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}(\vec{e_1} + \vec{e_2} + 2\vec{e_3})$$

Dado w na base F, $\vec{w} = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{3})_F$,

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 0 \end{bmatrix}_E.$$

2ª Questão: Seja $E = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ uma base ortonormal positiva.

(a) (2,5) Dados $\vec{u} = \vec{e_1} - \vec{e_2}$, $\vec{v} = \vec{e_2} - \vec{e_3}$, construir uma base ortonormal positiva $F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ tal que: $\vec{f_1}$ e $\vec{u}$ são paralelos e têm o mesmo sentido, $\vec{f_2}$ é combinação linear de $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e $\vec{f_2}.\vec{e_1} > 0$.

(b) (1,0) Dado $\vec{w} = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{3})_F$, expressar $\vec{w}$ na base E.

$$\vec{u} = \vec{e_1} - \vec{e_2} \qquad \vec{v} = \vec{e_2} - \vec{e_3}$$

$$\vec{f_1} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e_1} - \vec{e_2}\right).$$

$$\vec{f_2}' = v - \text{proj}_{\vec{f_1}} \vec{v} = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{f_1}) \cdot \vec{f_1} =$$

$$= \left(\vec{e_2} - \vec{e_3}\right) - \left((\vec{e_1} - \vec{e_2}) \cdot (\vec{e_2} - \vec{e_3})\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\vec{e_1} - \vec{e_2}\right).$$

$$= \vec{e_2} - \vec{e_3} + \frac{1}{2}\left(\vec{e_1} - \vec{e_2}\right)$$

$$\vec{f_2} = \frac{\vec{f_2}'}{\|\vec{f_2}'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\vec{e_1} + \vec{e_2} - \vec{e_3}\right).$$

$$\vec{f_3} = \vec{f_1} \wedge \vec{f_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\vec{e_1} + \vec{e_2} + 2\vec{e_3}\right)$$

Dado w na base F, $\vec{w} = (\sqrt{2}, \sqrt{6}, \sqrt{3})_F$,

$$\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} \\ 0 & -1/\sqrt{3} & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{6} \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1 \\ \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1 \\ 0 \end{bmatrix}_E.$$

3ª Questão:

(a) (1,5) Seja $ABCD$ um tetraedro tal que $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{2}, ||\overrightarrow{AC}|| = 3$ e $||\overrightarrow{AD}|| = 5$. Sabendo que a medida em radianos do ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é $\frac{\pi}{4}$, e que $\overrightarrow{AD}$ tem a mesma direção que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, determine a altura do tetraedro relativa à base ABC e calcule seu volume.

(b) (1,5) Seja ABC um triângulo; X o baricentro (o ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC, mostre, usando vetores, que $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$ onde N é o ponto médio de $\overrightarrow{BC}$.

(c) (0,5) Seja $ABCD$ um tetraedro; X o baricentro do triângulo ABC, expresse $\overrightarrow{DX}$ em termos de $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

(a) $Vol_{Tetraedro} = \frac{1}{6} Vol_{Paralelepipedo} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| =$

$\frac{1}{6} \underbrace{||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}||}_{||\overrightarrow{AB}||.||\overrightarrow{AC}||.\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} . \underbrace{||\overrightarrow{AD}||}_{5} . \underbrace{|\cos\theta|}_{\theta \text{ é zero, pelo enunciado}} = \frac{1}{6} . \sqrt{2} . 3 . \frac{\sqrt{2}}{2} . 5 = \frac{5}{2}$

Altura relativa a base ABC $= ||\overrightarrow{AD}|| = 5$.

(b) Seja ABC o triangulo e X o ponto de encontro das medianas, quero expressar $\overrightarrow{AX}$ em função de $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$.

Então: $\overrightarrow{AX} = \alpha\left(\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}\right)$ e $\overrightarrow{BX} = \beta\left(\frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}}{2}\right)$.

$\overrightarrow{AX} + \overrightarrow{XB} = \overrightarrow{AB}$ então: $\overrightarrow{XB} = -\beta\left(\frac{-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}}{2}\right) = -\frac{\beta}{2}\left(-2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

Somando: $\frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{\alpha}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2\beta}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{\beta}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$.

e assim (como $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são L.I) $\Rightarrow$

$$\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow$$

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 0 \quad \underline{e} \quad \frac{\alpha}{2}+\beta = 1 \Longrightarrow \alpha = \beta \text{ e}$$

$$\frac{3\alpha}{2} = 1 \Longrightarrow \alpha = \frac{2}{3}.$$

Assim $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\underbrace{\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right)}_{\overrightarrow{AN}} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$

(c) $\overrightarrow{DX} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AX} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right).$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$$
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$$

Então:

$$\overrightarrow{DX} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right) + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right) =$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}.$$

3ª Questão:

(a) (1,5) Seja $ABCD$ um tetraedro tal que $||\overrightarrow{AB}|| = 5, ||\overrightarrow{AC}|| = \sqrt{3}$ e $||\overrightarrow{AD}|| = 2$. Sabendo que a medida em radianos do ângulo entre $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ é $\frac{\pi}{3}$, e que $\overrightarrow{AD}$ tem sentido oposto a $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, determine a altura do tetraedro relativa à base ABC e calcule seu volume.

(b) (1,5) Seja ABC um triângulo; X o baricentro (o ponto de encontro das medianas) do triângulo ABC, mostre, usando vetores, que $\overrightarrow{AX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN}$ onde N é o ponto médio de $\overrightarrow{BC}$.

(c) (0,5) Seja $ABCD$ um tetraedro; X o baricentro do triângulo ABC, expresse $\overrightarrow{DX}$ em termos de $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$.

(a) $Vol_{Tetraedro} = \frac{1}{6} Vol_{paralelepípedo} = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}| =$

$\frac{1}{6} ||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|| \cdot ||\overrightarrow{AD}|| \cdot |\cos\theta| = \frac{1}{6} ||\overrightarrow{AB}|| \cdot ||\overrightarrow{AC}|| \cdot \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \; ||\overrightarrow{AD}|| \cdot 1 =$

$\frac{1}{6} \cdot 5 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \frac{5}{2}.$

Altura relativa à base ABC. $= ||\overrightarrow{AD}|| = 2.$

(b).