1ª Questão: (3,0)

a) Obtenha a série de Taylor da função $f(x) = \dfrac{e^{x^2} + e^{-x^2}}{2}$ desenvolvida em torno de $x_0 = 0$ e dê seu raio de convergência.

b) Seja f a função dada no item (a). Determine o valor de $\dfrac{d^{(11)} f}{dx}(0)$ e $\dfrac{d^{(12)} f}{dx}(0)$.

c) Determine todos os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-4)^n}{n3^n}$ converge.

2ª Questão: (3,5)

a) Determine a série de senos da função $f(x) = -x^2$, $0 < x < \pi$. ímpar

b) A soma da série obtida acima, $S(x)$, define uma função de domínio $\mathbb{R}$. Esboce seu gráfico em $[-10, 10]$.

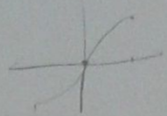
c) Calcule

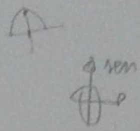
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4},$$

sabendo que a série

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos[(2n+1)x]}{(2n+1)^2}.$$

é a série de Fourier de $|x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.





$\to \frac{a_0}{2}$

a-) $a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -x^2\,dx = \frac{-2}{\pi}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi} = -\frac{2}{\cancel{\pi}}\cdot\frac{\pi^3}{3} = -\frac{2}{3}\cdot\pi^2$

$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -x^2\cdot sen(kx)\,dx = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\, sen(kx)\,dx$

$u = x^2$

$du = 2x\,dx$

$dv = sen(kx)\,dx$

$v = -\frac{\cos(kx)}{k}$

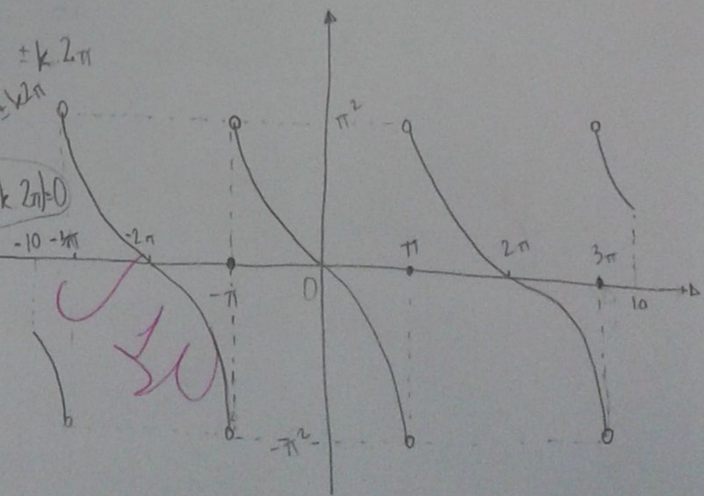
$-\frac{\pi^2}{k}\cdot\cos(k\pi)$

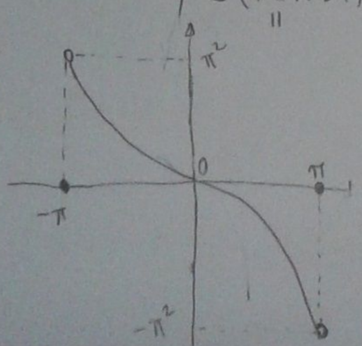
$= -\frac{2}{\pi}\left[-\frac{x^2\cdot\cos(kx)}{k}\Big|_0^{\pi} + 2\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\cdot x\,dx\right]$ 0,5 acabe

$SF(x) = -\frac{2}{3}\cdot\pi^2\cdot\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[-\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{k}\cdot(-1)^k + 2\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\cdot x\,dx\right)\right]$

b-)

$$S(x) = \begin{cases} x^2; & -\pi \pm k2\pi < x < 0 \pm k2\pi \\ -x^2; & 0 \pm k2\pi < x < \pi \pm k2\pi \\ S(\pi \pm k2\pi) = S(-\pi \pm k2\pi) = 0 \end{cases}$$





$A\,x^n$

$$\frac{du}{dx}x - u = \frac{u^2}{x^2+u}$$

3ª **Questão:** (3,5) Resolva as equações diferenciais abaixo:

a) $y' = \dfrac{y^2}{x^2+xy}$ $\qquad u = \dfrac{x}{y} \rightarrow$

b) $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$ ✓

c) $2x^2y'' + 3xy' - y = x^3$, para $x > 0$ (verifique que $y(x) = \frac{1}{x}$ é solução da equação homogênea associada) $\rightarrow$

b) $y'' - 4y' + 4y = x.\,e^{2x}$

eq. homogênea: $y'' - 4y' + 4y = 0$

eq. característica: $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ $\quad \Delta = 16 - 4(1)(4) = 0 \quad \lambda = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$

$\lambda = 2$ (raiz dupla)

sol. homogênea: $y_h(x) = c_1\,e^{2x} + c_2.\,x.\,e^{2x}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

C

sol. particular:

$y_p(x) = A\,x^2\,e^{2x}$ $\qquad y_p'(x) = A(2x\,e^{2x} + 2x^2\,e^{2x})$

$y_p''(x) = A(2\,e^{2x} + 4x\,e^{2x}) + A(4x\,e^{2x} + 4x^2\,e^{2x})$

$2A\,e^{2x} + \cancel{8Ax}\,e^{2x} + \cancel{4Ax^2}\,e^{2x} - \cancel{8Ax}\,e^{2x} - \cancel{8Ax^2}\,e^{2x}$

$+ \cancel{4Ax^2}\,e^{2x} = x\,e^{2x} \rightarrow 2A\,e^{2x} = x\,e^{2x} \rightarrow A = x/2$

constante?!

$y_p(x) = \dfrac{x^3}{2}\,e^{2x}$ $\qquad$ 0,5

sol. geral: $y(x) = c_1\,e^{2x} + c_2x.\,e^{2x} + \dfrac{x^3}{2}\,e^{2x}$; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

a) $u = \dfrac{y}{x} \rightarrow y = ux \quad y' = u'.x + u$

$u'x + u = \dfrac{u^2.x^2}{x^2 + x^2u} \rightarrow u'x + u = \dfrac{u^2.x^2}{x^2(1+u)} \rightarrow \dfrac{du}{dx}x + u = \dfrac{u^2}{1+u}$

CONTINUAÇÃO DA a) na 1º página! $\longrightarrow$

c)

c-) $2x^2 y'' + 3x \cdot y' - y = x^3 \quad , x > 0$

homogênea associada: $2x^2 \cdot y'' + 3x y' - y = 0$

$x^2 y'' + \frac{3x}{2} y' - \frac{1}{2} \cdot y = 0$ Eq Euler soluções $y = x^s$

$y_1 = x^{-1}$ ✓

$y_1 = x^{-1}$ $\quad x^2 \cdot \left(\frac{2}{x^3}\right) + \frac{3x}{2} \cdot \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{2}{x} - \frac{3}{2x} - \frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow 0 = 0$

$y_1' = -x^{-2}$

$y_1'' = 2 \cdot x^{-3}$ $\quad \therefore y_1 = x^{-1}$ é raiz

$y = x^s \quad y' = s \cdot x^{s-1} \quad y'' = s \cdot (s-1) x^{s-2}$

$x^2 \cdot s(s-1) x^{s-2} + \frac{3x}{2} \cdot s \cdot x^{s-1} - \frac{1}{2} \cdot x^s = 0 \Rightarrow x^s s(s-1) + \frac{3}{2} \cdot x^s s - \frac{1}{2} x^s = 0$

$\Rightarrow s^2 - s + \frac{3}{2} s - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow s^2 + \frac{s}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Delta = \frac{1}{4} - 4(1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$

$s = \dfrac{-\frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}}{2} \begin{cases} 1/2 \\ -1 \end{cases}$

$\therefore y_1(x) = x^{-1} \quad y_2(x) = x^{1/2}$

sol. particular: $y_p(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$

$y_p'(x) = 3A \cdot x^2 + 2Bx + C \quad y_p''(x) = 6Ax + 2B$

$2x^2(6Ax + 2B) + 3x(3Ax^2 + 2Bx + C) - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = x^3$

$12Ax^3 + 4Bx^2 + 9Ax^3 + 6Bx^2 + 3Cx - Ax^3 - Bx^2 - Cx - D = x^3$

$20Ax^3 + 9Bx^2 + 2Cx - D = 1x^3 \quad A = 1/20 \quad B = C = D = 0$

$y_p(x) = x^3/20$

1,5

Sol. geral: $y(x) = c_1 \cdot x^{-1} + c_2 \cdot x^{1/2} + x^3/20 \quad ; c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV
Escola Politécnica - Prova Substitutiva - 01/12/2014

Turma B

Nome : HÉROI - seja como ele!!

NºUSP :

Professor(a) : Ponani Turma : 01

Q	N
1	—
2	1,5
3	3,0
Total	4,5

$u^2 - u - u^2$

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES!

$$\frac{du}{dx}\cdot x = \frac{u^2}{1+u} - \frac{u}{1} \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x = \frac{u^2 - u(1+u)}{(1+u)} \Rightarrow \frac{du}{dx}\cdot x = -\frac{u}{1+u}$$

$\Rightarrow -\frac{1+u}{u}\,du = \frac{1}{x}\,dx$ Integrando $-\int \frac{1+u}{u}\,du = \ln|x| + C \Rightarrow$

$$\Rightarrow -\left[\int \frac{1}{u}\,du + \int 1\,du\right] = \ln|x| + C \Rightarrow -\left[\ln|u| + u\right] = \ln|x| + C$$

$$\Rightarrow -\ln|y/x| + \frac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow \ln|y| - \frac{y}{x} + C = 0$$