Tu

Questão 1. (2,0 pontos) Determine o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-2)^n.$$

Questão 2. (3,0 pontos) Decida se as seguintes séries são convergentes ou divergentes, justificando suas afirmações:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{1+n^{3/2}}-n^{3/4})$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n[1+(\ln n)^2]}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)$

Turma A

Questão 3. (2,5 pontos) Sabendo que a série de Fourier de senos da função $f(x) = x(\pi - x)$ é

$$S(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}(2k+1)x}{(2k+1)^3} \quad , \quad 0 < x < \pi,$$

determine:

a) os valores de $S(-\pi/2)$, $S(9)$ e $S(10)$.

b) a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}$.

Turma A

Questão 4. (2,5 pontos) Sabendo que $y_1(x) = e^{x^3}$ é uma solução da equação

$$xy'' - 2y' - 9x^5y = 0,$$

determine a solução geral da equação

$$xy'' - 2y' - 9x^5y = 6x^5e^{x^3}.$$

Gabarito Sub - 2011

Q1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x-2)^n$ Raio de convergência e intervalo de convergência = ?

Temos que o nosso termo geral é $a_n = \frac{n!}{n^n}(x-2)^n$

A fim de determinar para que valores de x nossa série converge, vamos aplicar o Critério da Razão à série do módulo, isto é, à $\sum |a_n|$ (lembrando que os Critérios da Razão e da Raiz, muito usados para determinar raio de convergência de séries de potências, só podem ser usados para séries de termos positivos - por isso usamos o módulo ;D)

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!\,|x-2|^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!\,|x-2|^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)|x-2|}{(n+1)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-2|}{\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}} = \frac{|x-2|}{e}$$

Se $\frac{|x-2|}{e} < 1$, isto é, se $2-e < x < 2+e$, $\sum |a_n|$ converge pelo Critério da Razão e, $\therefore$, $\sum a_n$ converge absolutamente

Se $\frac{|x-2|}{e} > 1$, isto é, $x < 2-e$ ou $x > 2+e$, $\sum |a_n|$ diverge pelo Critério da Razão e, $\therefore$, $\sum a_n$ diverge pelo Critério do Termo Geral (lembrando que, se $\sum |a_n|$ divergir pelos Critérios da Razão ou da Raiz - e só por eles! -, então $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$)

Agora, se $|x-2| = e \leftrightarrow x-2 = \pm e$, nada podemos afirmar sobre a série apenas com esse Critério; teremos que analisar os dois casos separadamente:

• Se $x-2=e$, $\sum a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,e^n}{n^n}$

Se fizermos o quociente a_{n+1}/a_n para vermos como ele se comporta, teremos:

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$. Temos, porém, que, à medida que n cresce $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ vai tendendo ao número e do modo crescente e monótono, sem JAMAIS assumir o valor de e. Assim sendo, temos que $e/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 1$, para qualquer valor de n. Mas $e/\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$; logo, $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \sim a_{n+1} > a_n$, para qualquer n. Assim, se um termo de nossa seqüência a_n é sempre MAIOR que o anterior (i.e., ela é crescente) e ela é positiva ($a_n > 0, \forall n$), não há como $\lim_{n\to\infty} a_n$ tender a zero, ou seja, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, com $L \neq 0$. Assim, nossa série diverge pelo Critério do Termo Geral.

O mesmo vale para quando $x-2=-e$, em que temos $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n!\,e^n}{n^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. Temos que, pelos termos pares:

$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^{2n}}_{=1} \underbrace{a_{2n}}_{L} = \underbrace{L}$, enquanto que, pelos termos ímpares:

$\lim_{n\to\infty} \underbrace{(-1)^{2n+1}}_{=-1} \underbrace{a_{2n+1}}_{L} = \underbrace{-L}$. Assim, se a seqüência restrita aos seus termos pares e ímpares converge para lugares diferentes, tem-se que $\nexists \lim_{n\to\infty} (-1)^n a_n$, e $\therefore$ a série diverge pelo Critério do Termo Geral (e NÃO pelo Critério das Séries Alternadas!!)

Q2) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\sqrt{1+n^{3/2}} - n^{3/4}\right)}_{a_n}$

Vamos ver como se comporta o termo geral quando $n \to \infty$:

$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+n^{3/2}} - n^{3/4}\right)$ *é uma indeterminação do tipo "$\infty - \infty$"; podemos multiplicar em cima e em baixo por seu "conjugado":

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{1+n^{3/2}} - n^{3/4}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt{1+n^{3/2}} + n^{3/4}\right)}{\left(\sqrt{1+n^{3/2}} + n^{3/4}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|1+n^{3/2}| - n^{3/2}}{\sqrt{1+n^{3/2}} + n^{3/4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+\cancel{n^{3/2}} - \cancel{n^{3/2}}}{\sqrt{1+n^{3/2}} + n^{3/4}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 \to 0}{\sqrt{1+n^{3/2}} + n^{3/4} \to \infty} = 0$$

Temos que é obedecido o Critério do Termo Geral, isto é, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$; logo, NADA podemos afirmar sobre a convergência de $\sum a_n$. Se a compararmos no limite com $\sum 1/n$, a qual diverge pelo Critério Integral, teremos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+n^{3/2}} - n^{3/4}\right)}{1/n} = \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt{1+n^{3/2}} - n^{3/4}\right)\frac{\left(\sqrt{1+n^{3/2}} + n^{3/4}\right)}{\left(\sqrt{1+n^{3/2}} + n^{3/4}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{1+n^{3/2}} + n^{3/4}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^{3/4}}}{\cancel{n^{3/4}}} \cdot \frac{n^{1/4} \to \infty}{\sqrt{\underbrace{1/n^{3/2}}_{\to 0} + 1} + 1 \to 2}$$

$= +\infty$

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = +\infty$, quer dizer que, no infinito, $a_n \gg 1/n$; e, como $\sum 1/n$ diverge, temos que $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{1+n^{3/2}} - n^{3/4})$ diverge pelo Critério da Comparação no limite.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\frac{1}{n[1+(\ln n)^2]}}^{a_n}$

Temos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n[1+(\ln n)^2]} = 0$,

logo, a série obedece o Critério do Termo geral. Se compararmos com $\sum 1/n$ (que converge pelo Critério Integral), teremos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}[1+(\ln x)^2]} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+(\ln x)^2} = 0$$

Se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{1/n} = 0$, quer dizer que, no infinito $a_n \ll 1/n$; mas $\sum 1/n$ diverge, logo, NADA podemos afirmar.

Comparando com $\sum 1/n^2$ (que converge pelo Critério Integral), temos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x}^2}{\cancel{x}[1+(\ln x)^2]} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+(\ln x)^2} \underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\overset{L'H}{\longrightarrow}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2\ln x}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2\ln x} \underset{\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}}{\overset{L'H}{\longrightarrow}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{2}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{2} = +\infty;$$

isto, porém, nos diz que $a_n \gg 1/n^2$; mas $\sum 1/n^2$ converge $\to$ NADA se pode afirmar

Temos que $f(x) = \frac{1}{x[1+(\ln x)^2]}$ é uma função contínua em seu domínio, é positiva, decrescente e com $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$;

Logo, pode-se aplicar o Critério Integral a ela, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge $\leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge

$$\int f(x)dx = \int \frac{dx}{x[1+(\ln x)^2]} \curvearrowright \begin{matrix} \ln x = u \\ \frac{1}{x}dx = du \end{matrix} \curvearrowright = \int \frac{du}{1+u^2} =$$

$= \operatorname{arctg} u = \operatorname{arctg}(\ln x)$

$$\therefore \int_1^{\infty} f(x)dx = \operatorname{arctg}(\ln x)\Big|_1^{\infty} = \lim_{b\to\infty} \operatorname{arctg}(\ln b) -$$

$$- \operatorname{arctg}(\ln 1) = \pi/2 - 0 = \pi/2$$

Como a integral converge para um valor finito, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n[1+(\ln x)^2]}$ converge pelo Critério da Integral

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}\right)}^{a_n}$

Tem-se que essa série satisfaz o Critério do termo geral, isto é, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Se a compararmos com $\sum 1/n^{4/3}$, que converge pelo Critério Integral, teremos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(1/n^{2/3})}{1/n^{4/3}} \curvearrowright \begin{matrix} 1/n^{2/3} = m \\ n\to+\infty \\ m\to 0^+ \end{matrix} \curvearrowright = \lim_{m\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^2 m}{m^2}$$

$= \lim_{m\to 0^+} \underbrace{\frac{\operatorname{sen} m}{m}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} m}{m}}_{1} = 1$; como o limite resultou em um valor finito e diferente de 0, tem-se que $\sum a_n$ converge $\leftrightarrow \sum 1/n^{4/3}$ converge

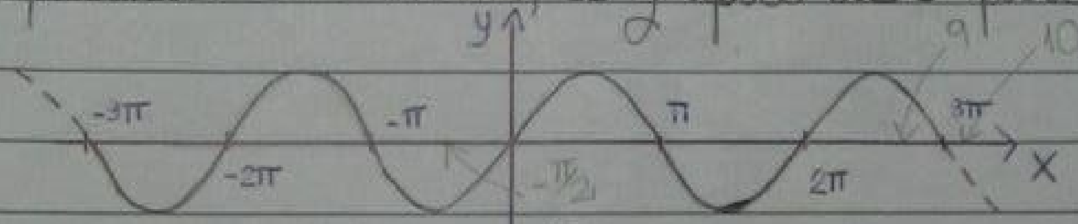
$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \text{sen}^2(1/n^{2/3})$ converge pelo Critério da comparação no limite

Q3) $S(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\text{sen}(2k+1)x}{(2k+1)^3}$, $0<x<\pi$, é a série de senos de $f(x) = x(\pi - x)$

se valem isso, então podemos dizer que:

$$S(x) = \begin{cases} x(\pi - x), & \text{se } x \in [0, \pi] \\ +x(\pi + x), & \text{se } x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

e S converge para a extensão periódica do que ocorre em $[-\pi, \pi]$ nos demais intervalos de amplitude 2π. Assim, o gráfico de S fica:



Com o auxílio do gráfico, podemos calcular as seguintes somas:

a) $S(-\pi/2) = -\frac{\pi}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{4}$

$S(9) = S(9 - 2\pi) = (9 - 2\pi)(\pi - [9 - 2\pi]) =$
$= (9 - 2\pi)(3\pi - 9)$

$S(10) = S(-\pi + [10 - 3\pi]) = S(10 - 4\pi) =$
$= (10 - 4\pi)(\pi + 10 - 4\pi) = (10 - 4\pi)(10 - 3\pi)$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = ?$

Aplicando a identidade de Parseval a esta série, teremos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left\{\frac{8}{\pi(2k+1)^3}\right\}^2 = \frac{1}{\pi}\left\{\int_{-\pi}^{0}\left(x(\pi+x)\right)^2 dx + \int_{0}^{\pi}\left(-x(\pi-x)\right)^2 dx\right\}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[x(\pi-x)]^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2(\pi^2-2\pi x+x^2)dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2x^3}{3} - \frac{2x^4\pi}{4} + \frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^5}{3} - \frac{\pi^5}{2} + \frac{\pi^5}{5}\right)$$

$$= \frac{\pi^4}{15} = \frac{64}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

Como, porém, é pedido o valor de $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}$
teremos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{1}{1^6} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)} = \frac{\pi^6}{960} - 1$$

Q3) $xy'' - 2y' - 9x^5y = 0 \quad y_1 = e^{x^3}$

$$y'' - \frac{2}{x}y' - 9x^4y = 0$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{x^3} & \varphi \\ 3x^2e^{x^3} & \varphi' \end{vmatrix} = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{\ln x^2} = x^2$$

$$e^{x^3}\varphi' - 3x^2e^{x^3}\varphi = x^2 \rightsquigarrow \varphi' - 3x^2\varphi = e^{-x^3}x^2$$

Buscando o fator integrante desta equação:

$$u(x) = e^{\int -3x^2dx} = e^{-x^3}$$

$$\therefore (e^{-x^3}\cdot\varphi)' = x^2e^{-2x^3}$$

$\therefore e^{-x^3}f = \int e^{-2x^3}x^2 dx = -\frac{e^{-2x^3}}{6} + C_1$

$\therefore f = C_1 e^{x^3} - \frac{e^{-x^3}}{6}$

$\therefore y_H = C_1 e^{x^3} + C_2 e^{-x^3}$ (solução da homogênea)

$xy'' - 2y' - 9x^5 y = 6x^5 e^{x^3}$

$y'' - \frac{2}{x}y' - 9x^4 y = 6x^4 e^{x^3}$

Como a equação não possui seus coeficientes constantes e o 2º membro da equação também não é do tipo (polinômio). $e^{\alpha x}(\cos\beta x + \operatorname{sen}\beta x)$, NÃO podemos usar o método dos coeficientes a determinar. Assim, utilizando a Variação de Parâmetros, temos:

$y_P = u_1(x)e^{x^3} + u_2(x)e^{-x^3}$

$$\begin{cases} e^{x^3}u_1' + e^{-x^3}u_2' = 0 \\ 3x^2e^{x^3}u_1' - 3x^2e^{-x^3}u_2' = 6x^4e^{x^3} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} e^{x^3} & e^{-x^3} \\ 3x^2e^{x^3} & -3x^2e^{-x^3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6x^4e^{x^3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} e^{x^3} & e^{-x^3} \\ 3x^2e^{x^3} & -3x^2e^{-x^3} \end{vmatrix} = -3x^2 - 3x^2 = -6x^2$$

$$u_1' = \begin{vmatrix} 0 & e^{-x^3} \\ 6x^4e^{x^3} & -3x^2e^{-x^3} \end{vmatrix} \frac{1}{-6x^2} = \frac{-6x^4}{-6x^2} = x^2$$

$u_1 = \int x^2 dx = x^3/3 + C_1$

$$u_2' = \begin{vmatrix} e^{x^3} & 0 \\ 3x^2e^{x^3} & 6x^4e^{x^3} \end{vmatrix} \frac{1}{-6x^2} = \frac{6x^4(e^{x^3})^2}{-6x^2} = -x^2e^{2x^3}$$

$u_2 = \int -x^2e^{2x^3}dx = -e^{x^3}/6 + C_2$

$\therefore y_G = y_H + y_P = C_1e^{x^3} + C_2e^{-x^3} + \frac{x^3e^{x^3}}{3} - \frac{e^{-x^3}}{6}$