Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2o. Semestre 2014 - 24/11/2014

1ª Questão: Resolva:

a) (1,5 ponto) $(xy^4 + 4xy^5)\,dx + (2x^2y^4 - 1)\,dy = 0$

b) (1,5 ponto) $y' = \dfrac{4yx + 3y^2}{x^2}$, $x > 0$

Solução:

a) Sejam $P(x, y) = xy^4 + 4xy^5$ e $Q(x, y) = 2x^2y^4 - 1$.

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4xy^4 \neq \dfrac{\partial P}{\partial y} = 4xy^3 + 20xy^4$, a equação não é exata.

Como $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = -\dfrac{4xy^3 + 16xy^4}{xy^4 + 4xy^5} = -\dfrac{4}{y}$ depende apenas de y, a equação admite um fator integrante que depende apenas de y, dado por:

$$\mu(y) = e^{\int (-\frac{4}{y})\,dy} = e^{-4\ln|y|} = e^{\ln|\frac{1}{y^4}|} = \frac{1}{y^4}$$

Multiplicando a EDO pelo fator integrante, temos:

$$(x + 4xy)\,dx + \left(2x^2 - \frac{1}{y^4}\right)dy = 0$$

Sendo assim, agora temos: $P(x, y) = x + 4xy$ e $Q(x, y) = 2x^2 - \dfrac{1}{y^4}$.

Como $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 4x = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, a equação é exata.

A solução de uma EDO exata é dada por $\phi(x, y) = C$, $C \in \mathbb{R}$, sendo que $\nabla\phi = (P, Q)$. Assim, temos:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x} = x + 4xy \\[2ex] \dfrac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^2 - \dfrac{1}{y^4} \end{cases}$$

Integrando em x a primeira equação:

$$\phi(x, y) = \frac{x^2}{2} + 2x^2y + c(y)$$

Derivando em y:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 2x^2 + c'(y)$$

Comparando com a segunda equação:

$$c'(y) = -\frac{1}{y^4} \Rightarrow c(y) = \frac{1}{3y^3}$$

Sendo assim, temos:

$$\phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + 2x^2y + \frac{1}{3y^3}$$

Portanto, a solução geral da equação diferencial é dada por:

$$\frac{x^2}{2} + 2x^2y + \frac{1}{3y^3} = C,\, C \in \mathbb{R}$$

b)

$$y' = \frac{4yx + 3y^2}{x^2} = f(x,y),\ x > 0$$

Como $f(x,y) = f(tx,ty), \forall t \neq 0$, temos que a equação é homogênea. Sendo assim, utilizamos a seguinte mudança de variável: $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u'x + u$.

$$y' = \frac{4yx + 3y^2}{x^2} = \frac{y}{x}\left(4 + 3\frac{y}{x}\right) \Rightarrow u'x + u = 4u + 3u^2$$

$$u'x = 3u + 3u^2 \Rightarrow \int \frac{du}{3u(u+1)} = \int \frac{dx}{x},\ u \neq 0 \text{ e } u \neq -1$$

Repare que $u = 0 \Rightarrow y = 0$ e $u = -1 \Rightarrow y = -x$ são soluções da EDO.

Expandindo a função $\frac{1}{u(u+1)}$ em frações parciais:

$$\frac{1}{u(u+1)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u+1}$$

$$A(u+1) + Bu = 1 \Rightarrow A = 1, B = -1$$

$$\therefore \int \frac{du}{u(u+1)} = \ln|u| - \ln|u+1| = \ln\left|\frac{u}{u+1}\right|$$

Sendo assim, temos:

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = \ln x + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\ln\left|\frac{u}{u+1}\right| = 3\ln x + C, C \in \mathbb{R}$$

$$\frac{u}{u+1} = Cx^3, C \in \mathbb{R}$$

Portanto as soluções da equação diferencial para $x > 0$ são dadas por:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{y+x} = Cx^3, C \in \mathbb{R} \\ y = 0 \\ y = -x \end{cases}$$

2ª Questão:

a) (2,0 pontos) Encontre todas as soluções de

$$y''' - 3y'' + 4y = e^{2x} + x^2$$

b) (1,5 ponto) Encontre todas as soluções de

$$2x^2y'' + y'(2x - 4x^2) + y(3x^2 - 2x - 2) = 0, \text{ para } x > 0,$$

admitindo que $y = xe^x$ é uma das soluções.

Solução:

a) Deseja-se resolver a seguinte EDO:

$$y''' - 3y'' + 4y = e^{2x} + x^2 \tag{1}$$

Para isso, primeiro vamos encontrar a solução da equação homogênea:

$$y''' - 3y'' + 4y = 0 \tag{2}$$

Como a equação possui coeficientes constantes, temos que as soluções da equação homogênea são da forma

$$y(x) = e^{sx} \tag{3}$$

Deverivando (3) e substituindo em (2), obtemos o seguinte polinômio característico:

$$s^3 - 3s^2 + 4 = 0 \Rightarrow (s+1)(s-2)^2 = 0$$

Sendo assim, a solução da equação homogênea é dada por:

$$y_h(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

Para encontrar a solução geral da equação (1), iremos utilizar o Método dos Coeficientes a Determinar e o princípio da superposição. Assim, primeiramente encontramos uma solução particular para a seguinte EDO:

$$y''' - 3y'' + 4y = e^{2x} \tag{4}$$

Como 2 é raiz dupla do polinômio característico, propomos a seguinte solução particular:

$$y_{p_1}(x) = x^2Ae^{2x} \tag{5}$$

Derivando (5):

$$y'_{p_1}(x) = A(2xe^{2x} + 2xe^{2x}) = 2A(x + x^2)e^{2x}$$
$$y''_{p_1}(x) = 2A[(2x + 1)e^{2x} + 2(x + x^2)e^{2x}] = 2A(1 + 4x + 2x^2)e^{2x}$$
$$y'''_{p_1}(x) = 2A[(4x + 4)e^{2x} + 2(1 + 4x + 2x^2)] = 4A(2x^2 + 6x + 3)e^{2x}$$

Substituindo em (4):

$$4A(2x^2 + 6x + 3)e^{2x} - 3 \cdot 2A(1 + 4x + 2x^2)e^{2x} + 4 \cdot x^2 Ae^{2x} = e^{2x}$$
$$\Rightarrow Ae^{2x}(8x^2 + 24x + 12 - 12x^2 - 24x - 6 + 4x^2) = e^{2x}$$
$$\Rightarrow Ae^{2x} \cdot 6 = e^{2x} \Rightarrow A = \frac{1}{6}$$
$$\therefore y_{p_1}(x) = \frac{x^2 e^{2x}}{6}$$

Agora encontramos uma solução particular para a seguinte EDO:

$$y''' - 3y'' + 4y = x^2 \tag{6}$$

Propomos a seguinte solução particular:

$$y_{p_2}(x) = Ax^2 + Bx + C \tag{7}$$

Derivando (7):

$$y'_{p_2}(x) = 2Ax + B$$
$$y''_{p_2}(x) = 2A$$
$$y'''_{p_2}(x) = 0$$

Substituindo em (6):

$$1 \cdot 0 - 3(2A) + 4(Ax^2 + Bx + C) = x^2$$
$$\begin{cases} 4A = 1 \\ 4B = 0 \\ -6A + 4C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = 0 \\ C = \frac{3}{8} \end{cases}$$
$$\therefore y_{p_2}(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8}$$

Pelo pricípio da superposição, temos que $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$ é uma solução particular de (1).

A solução geral da equação é a soma da solução homogênea com a solução particular. Assim:

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} + \frac{x^2 e^{2x}}{6} + \frac{x^2}{4} + \frac{3}{8},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

b) A EDO a ser resolvida apresenta o seguinte formato:

$$a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0 \tag{8}$$

Sendo:

$$\begin{cases} a_1(x) = 2x^2 \\ a_2(x) = 2x - 4x^2 \\ a_3(x) = 3x^2 - 2x + 2 \end{cases}$$

Sejam y_1 e y_2 2 soluções LI da EDO. O Wronskiano de (8) é dado por:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

Para EDOs no formato de (8), o Wronskiano respeita a seguinte relação:

$$W'(x) = -\frac{a_2(x)}{a_1(x)}W(x) \Rightarrow W(x) = Ce^{-\int \frac{a_2(x)}{a_1(x)}\,dx},\ C \neq 0$$

Sendo assim, dado $y_1(x)$, é possível determinar $y_2(x)$ resolvendo uma EDO de primeira ordem.
Dado que $y_1(x) = xe^x$ é solução da EDO e escolhendo $C = 1$, temos:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} xe^x & y_2 \\ (x+1)e^x & y_2' \end{vmatrix} &= e^{-\int \frac{2x-4x^2}{2x^2}\,dx} = e^{-\int (\frac{1}{x}-2)\,dx} \\ \Rightarrow xe^x y_2' - (x+1)e^x y_2 &= \frac{e^{2x}}{x} \\ \Rightarrow y_2' - \frac{x+1}{x}y_2 &= \frac{e^x}{x^2} \end{aligned} \tag{9}$$

(9) é uma EDO linear de primeira ordem. Assim, tem-se que um fator integrante da EDO acima é dado por:

$$\mu(x) = e^{\int (-\frac{x+1}{x})\,dx} = e^{\int (-1-\frac{1}{x})\,dx} = \frac{e^{-x}}{x}$$

Multiplicando (9) pelo fator integrante $\mu(x)$, temos:

$$\begin{aligned} y_2'\frac{e^{-x}}{x} - y_2 e^{-x}\frac{x+1}{x^2} &= \frac{1}{x^3} \\ \Rightarrow \left(y_2\frac{e^{-x}}{x}\right)' &= \frac{1}{x^3} \\ \Rightarrow y_2\frac{e^{-x}}{x} &= -\frac{1}{2x^2} \\ \therefore y_2(x) &= -\frac{e^x}{2x} \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral de (8) é dado por: $y(x) = C_1xe^x + C_2\frac{e^x}{x},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

3ª Questão:

a) (2,5 pontos) Sejam f e g contínuas no intervalo $\left]-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right[$.

Sabendo que $y_1 = \cos(x^2)$ e $y_2 = x\cos(x^2)$ são soluções de $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$, encontre todas as soluções de

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{1+x^2}}.$$

b) (1,0 ponto) Encontre todas as soluções da equação diferencial linear homogênea de coeficiêntes constantes, cujo polinômio característico é $(\lambda-4)^3(\lambda^2-8\lambda+25)^2$.

Solução:

a) A solução homogênea da equação é a combinação linear das duas soluções homogêneas, y_1 e y_2:

$$y_h(x) = C_1\cos(x^2) + C_2 x\cos(x^2), C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

Utilizamos o método da Variação dos Parâmetros para encontrar uma solução particular da seguinte forma:

$$y_p(x) = u_1(x)\cos(x^2) + u_2(x)x\cos(x^2)$$

Aplicando o método:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ q(x) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos(x^2) & x\cos(x^2) \\ -2x\operatorname{sen}(x^2) & -2x\operatorname{sen}(x^2)+\cos(x^2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \end{bmatrix}$$

Resolvendo o sistema pela regra de Cramer:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x\cos(x^2) \\ \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{1+x^2}} & -2x\operatorname{sen}(x^2)+\cos(x^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x^2) & x\cos(x^2) \\ -2x\operatorname{sen}(x^2) & -2x\operatorname{sen}(x^2)+\cos(x^2) \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{x\cos^2(x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{\cos^2(x^2)} = -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos(x^2) & 0 \\ -2x\operatorname{sen}(x^2) & \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{1+x^2}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos(x^2) & x\cos(x^2) \\ -2x\operatorname{sen}(x^2) & -2x\operatorname{sen}(x^2)+\cos(x^2) \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\cos^2(x^2)}{\sqrt{1+x^2}}}{\cos^2(x^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Integrando:

$$u_1 = -\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \underset{\substack{u=1+x^2 \\ du=2x\,dx}}{=} -\frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = -\sqrt{u} = -\sqrt{1+x^2}$$

$$u_2 = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \underset{\substack{x=\tan\theta \\ dx=\sec^2\theta\,d\theta}}{=} \int \sec\theta\,d\theta = \ln|\sec\theta + \tan\theta| = \ln|\sqrt{1+x^2}+x|$$

$$\therefore y_p(x) = (-\sqrt{1+x^2})\cos(x^2) + (\ln|\sqrt{1+x^2}+x|)x\cos(x^2)$$

A solução geral é a soma da solução homogênea com a solução particular:

$$y(x) = (C_1 - \sqrt{1+x^2})\cos(x^2) + (C_2 + \ln|\sqrt{1+x^2}+x|)x\cos(x^2), C_1, C_2, \in \mathbb{R}$$

b) Pelo seu polinômio característico, trata-se de uma EDO linear de ordem 7. O polinômio apresenta raiz $\lambda = 4$ com multiplicidade 3. A esta raiz, associam-se as soluções:

$$\{e^{4x}, xe^{4x}, x^2e^{4x}\}$$

As outras duas raízes são $\lambda = \frac{8\pm\sqrt{64-100}}{2} = 4 \pm 3i$, com multiplicidade 2. As soluções associadas a estas raízes são:

$$\{e^{4x}\cos(3x), e^{4x}\,\mathrm{sen}(3x), xe^{4x}\cos(3x), xe^{4x}\,\mathrm{sen}(3x)\}$$

Portanto, as solução geral da EDO é dada por:

$$y(x) = e^{4x}(C_1+C_2x+C_3x^2+(C_4x+C_5)\cos(3x)+(C_6x+C_7)\sin(3x)),\ C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7 \in \mathbb{R}$$