Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2o. Semestre 2012 - 26/11/2012 Turma A

Questão 1. a) (1,0 ponto) Determine a solução geral da equação $y' + \frac{1}{x}y = \arcsin x$.

b) (1,5 pontos) Determine a solução da equação $xy' - x = y + x\cos(\frac{2y}{x})$ que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

c) (1,5 pontos) Determine a solução geral da equação $y\,dx + x(\ln x + 2ye^{y^2})\,dy = 0$.

Solução. a) Podemos escrever a equação dada na forma $xy' + y = x\arcsin x$, ou ainda, como

$$\frac{d}{dx}[xy] = x\arcsin x.$$

Integrando,

$$xy = \int x\arcsin x\,dx = \frac{x^2}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Fazendo a mudança $x = \sin\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, podemos calcular a última integral como

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \sin^2\theta\,d\theta = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} = \frac{1}{2}\arcsin x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$y = \frac{C}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{4} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4x}\right)\arcsin x,$$

onde C é uma constante arbitrária.

b) Escrevendo a equação dada na forma

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{2y}{x}\right),$$

verificamos imediatamente que se trata de uma equação homogênea. Portanto, a mudança $y = xu$ transforma a equação dada numa equação de variáveis separáveis. Substituindo, obtemos

$$u + x\frac{du}{dx} = 1 + u + \cos 2u,$$

isto é,

$$\frac{du}{1+\cos 2u} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando, obtemos

$$\int \frac{du}{1+\cos 2x} = \ln|x| + C$$

Como $1 + \cos 2u = 2\cos^2 x$ e $\int \sec^2 u\,du = \text{tg } u$, verificamos imediatamente que a solução geral é

$$\text{tg } \frac{y}{x} = 2\ln|x| + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Para que $y(1) = 1$ devemos ter $C = \text{tg } 1$. Além disso, como o domínio da solução deve ser um intervalo contendo $x_0 = 1$, devemos ter $x > 0$. Logo, a solução é

$$y = x\text{arctg }(2\ln x + \text{tg } 1)$$

definida no intervalo $(0, +\infty)$.

.

c) Sejam $P(x,y) = y$ e $Q(x,y) = x(\ln x + 2ye^{y^2})$. Como $P_y = 1$ e $Q_x = 1 + \ln x + 2xye^{y^2}$, a equação não é exata. Como $\frac{Q_x - P_y}{Q} = \frac{\ln x + 2xye^{y^2}}{x(\ln x + 2ye^{y^2})} = \frac{1}{x}$ depende apenas de x, a equação admite um fator intgrante que depende apenas de x. Seja $\mu = \mu(x)$ o fator integrante. A condição $\frac{\partial}{\partial y}(P\mu) = \frac{\partial}{\partial x}(Q\mu)$ implica que $\mu + x\mu'(y) = 0$. Separando variáveis, obtemos

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{x}\, dy$$

e então

$$\mu = e^{-\ln|x|} = \frac{1}{x}.$$

Multiplicando a equação dada por μ obtemos a equação exata

$$\frac{y}{x}\, dx + (\ln x + 2ye^{y^2})\, dy = 0,$$

cuja solução geral é dada por $F(x,y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e F satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{y}{x} & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = \ln x + 2ye^{y^2} & (2) \end{cases}$$

Integrando (1) com relação a x, concluimos que $F(x,y) = y\ln x + K(y)$. Substituindo em (2), obtemos

$$\ln x + K'(y) = \ln x + 2ye^{y^2},$$

e, portanto, $K(y) = \int 2ye^{y^2}\, dy = e^{y^2}$. Assim, a solução geral da equação é dada por

$$y\ln x + e^{y^2} = C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Questão 2: (3,0 pontos) Determine a solução geral da equação

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \ln x.$$

Solução. Primeiro vamos determinar a solução geral da equação homogênea associada $y'' - 4y' + 4y = 0$. Como se trata de uma equação linear com coeficientes constantes e $\lambda = 2$ é raiz dupla da equação característica $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, a solução geral da equação homogênea associada é dada por

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x},$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais arbitrárias.

Agora, vamos usar o método de variação dos parametros para determinar uma solução particular da equação não homogênea. Tal solução tem a forma

$$y_p(x) = u_1(x) e^{2x} + u_2(x) x e^{2x},$$

onde $u_1(x)$ e $u_2(x)$ satisfazem

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \ln x \end{pmatrix}.$$

Multiplicando as duas equações por e^{-2x} e operando com as equações resultantes, obtemos o sistema

$$\begin{cases} u_1'(x) + x u_2'(x) & = 0 \\ \\ u_2'(x) & = \ln x \end{cases}$$

e, portanto, $u_1'(x) = -x \ln x$ e $u_2'(x) = \ln x$. Logo,

$$u_1(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x \qquad \text{e} \qquad u_2(x) = \ln x - x.$$

Assim,

$$y_p = e^{2x}(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2 \ln x}{2}) + e^{2x}(x^2 \ln x - x^2) = e^{2x}(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{3x^2}{4})$$

é uma solução particular e, portanto, a solução geral da equação é dada por

$$y = e^{2x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} \right),$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Questão 3: a) (1,5 pontos) Determine a solução geral da equação

$$x^2y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0,$$

sabendo que $y_1 = x\cos x$ é uma solução.

b) (1,5 pontos) Determine a solução geral da equação

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 2x + 3e^x.$$

Solução. a) Vamos procurar outra solução y_2 da forma $y_2(x) = x\cos x u(x)$, com u não constante. Seguirá que $\{y_1, y_2\}$ é linearmente independente e a solução geral será dada por $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, onde C_1 e C_2 são constante arbitrárias.

Impondo que y_2 seja solução, obtemos

$$x^2(-2\sin x - x\cos x)u(x) + 2x^2(\cos x - x\sin x)u'(x) + x^3\cos xu''(x) -$$
$$-2x(\cos x - x\sin x)u(x) - 2x^2\cos xu'(x) + 2x\cos xu(x) + x^3\cos xu(x) = 0,$$

isto é,

$$\cos xu''(x) - 2\sin xu'(x) = 0.$$

Escrevendo $u'(x) = v(x)$, obtemos

$$v'(x) = \frac{2\sin x}{\cos x}v(x),$$

e podemos tomar $v(x) = e^{-2\ln|\cos x|} = \sec^2 x$ e, portanto, $u(x) = \int v(x)\,dx = \text{tg}x$.

Logo, $y_2(x) = x\cos x\ \text{tg}x = x\sin x$ e a solução geral é

$$y(x) = x(C_1\cos x + C_2\sin x),$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrarias.

b) A equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$ e tem $\lambda = 1$ como raiz tripla. Portanto

$$y_h = C_1e^x + C_2xe^x + x^2C_1e^x$$

é a solução geral da equação homogênea associada.

Para determinar uma solução particular y_p, vamos determinar uma solução particular y_{1p} e y_{2p} de cada uma das equações

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 2x \qquad (1)$$

e

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 3e^x, \qquad (2)$$

respectivamente, e tomar $y_p = y_{1p} + y_{2p}$ (Princípio da Superposição).

Para a equação (1), vamos procurar y_{1p} da forma $y_{1p}(x) = Ax + B$. Substituindo, obtemos

$$3A - Ax - B = 2x$$

e, portanto, $A = -2$ e $B = -6$.

Para a equação (2), vamos procurar y_{2p} da forma $y_{2p}(x) = Dx^3e^x$. Temos

$$y'_{2p} = De^x(3x^2 + x^3) \quad , \quad y''_{2p} = De^x(6x + 6x^2 + x^3) \quad , \quad y'''_{2p} = De^x(6 + 18x + 9x^2 + x^3).$$

Substituindo, obtemos

$$De^x[6 + 18x + 9x^2 + x^3 - 3(6x + 6x^2 + x^3) + 3(3x^2 + x^3) - x^3] = 3e^x$$

e, portanto, $D = \frac{1}{2}$.

Logo, $y_p(x) = -2x - 6 + \frac{1}{2}x^3e^x$ é uma solução particular e a solução geral é dada por

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + x^2C_1e^x - 2x - 6 + \frac{1}{2}x^3e^x,$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes arbitrárias.

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2o. Semestre 2012 - 26/11/2012 Turma B

Questão 1. a) (1,0 ponto) Determine a solução geral da da equação $y' + \frac{1}{x}y = \arccos x$.

b) (1,5 pontos) Determine a solução da equação $xy' - x = y + x\cos(\frac{2y}{x})$ que satisfaz a condição inicial $y(1) = 1$.

c) (1,5 pontos) Determine a solução geral da da equação $y(\ln y + 2xe^{x^2})\,dx + x\,dy = 0$.

.

Solução. a) Podemos escrever a equação dada na forma $xy' + y = x\arccos x$, ou ainda, como

$$\frac{d}{dx}[xy] = x\arccos x.$$

Integrando,

$$xy = \int x\arccos x\,dx = \frac{x^2}{2}\arccos x + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Fazendo a mudança $x = \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi$, podemos calcular a última integral como

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\int \cos^2\theta\,d\theta = -\int \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = -\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} = -\frac{1}{2}\arccos x - \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + C.$$

Portanto, a solução geral é dada por

$$y = \frac{C}{x} - \frac{\sqrt{1-x^2}}{4} + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4x}\right)\arccos x,$$

onde C é uma constante arbitrária.

b) Escrevendo a equação dada na forma

$$y' = 1 + \frac{y}{x} + \cos\left(\frac{2y}{x}\right),$$

verificamos imediatamente que se trata de uma equação homogênea. Portanto, a mudança $y = xu$ transforma a equação dada numa equação de variáveis separáveis. Substituindo, obtemos

$$u + x\frac{du}{dx} = 1 + u + \cos 2u,$$

isto é,

$$\frac{du}{1+\cos 2u} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando, obtemos

$$\int \frac{du}{1+\cos 2x} = \ln|x| + C$$

Como $1 + \cos 2u = 2\cos^2 x$ e $\int \sec^2 u\,du = \mathrm{tg}\;u$, verificamos imediatamente que a solução geral é

$$\mathrm{tg}\;\frac{y}{x} = 2\ln|x| + C,$$

onde C é uma constante arbitrária. Para que $y(1) = 1$ devemos ter $C = \text{tg } 1$. Além disso, como o domínio da solução deve ser um intervalo contendo $x_0 = 1$, devemos ter $x > 0$. Logo, a solução é

$$y = x\text{arctg } (2\ln x + \text{tg } 1)$$

definida no intervalo $(0, +\infty)$.

.

c) Sejam $P(x,y) = y(\ln y + 2xe^{x^2})$ e $Q(x,y) = x$. Como $P_y = 1 + \ln y + 2xye^{x^2}$ e $Q_x = 1$, a equação não é exata. Como $\frac{Q_x - P_y}{P} = \frac{\ln y + 2xye^{x^2}}{y(\ln y + 2xe^{x^2})} = \frac{1}{y}$ depende apenas de y, a equação admite um fator intgrante que depende apenas de y. Seja $\mu = \mu(y)$ o fator integrante. A condição $\frac{\partial}{\partial y}(P\mu) = \frac{\partial}{\partial x}(Q\mu)$ implica que $\mu + y\mu'(y) = 0$. Separando variáveis, obtemos

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\frac{1}{y}\, dy$$

e então

$$\mu = e^{-\ln|y|} = \frac{1}{y}.$$

Multiplicando a equação dada por μ obtemos a equação exata

$$(\ln y + 2xe^{x^2})\, dx + \frac{x}{y}\, dy = 0,$$

cuja solução geral é dada por $F(x,y) = C$, onde C é uma constante arbitrária e F satisfaz

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \ln y + 2xe^{x^2} & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{x}{y} & (2) \end{cases}$$

Integrando (2) com relação a y, concluimos que $F(x,y) = x\ln y + K(x)$. Substituindo em (1), obtemos

$$\ln y + K'(x) = \ln y + 2xe^{x^2},$$

e, portanto, $K(y) = \int 2xe^{x^2}\, dx = e^{x^2}$. Assim, a solução geral da equação é dada por

$$x\ln y + e^{x^2} = C,$$

onde C é uma constante arbitrária.

Questão 2: (3,0 pontos) Determine a solução geral da equação

$$y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \ln x.$$

Solução. Primeiro vamos determinar a solução geral da equação homogênea associada $y'' - 6y' + 9y = 0$. Como se trata de uma equação linear com coeficientes constantes e $\lambda = 2$ é raiz dupla da equação característica $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$, a solução geral da equação homogênea associada é dada por

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x},$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais arbitrárias.

Agora, vamos usar o método de variação dos parametros para determinar uma solução particular da equação não homogênea. Tal solução tem a forma

$$y_p(x) = u_1(x) e^{2x} + u_2(x) x e^{2x},$$

onde $u_1(x)$ e $u_2(x)$ satisfazem

$$\begin{pmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ u_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{2x} \ln x \end{pmatrix}.$$

Multiplicando as duas equações por e^{-2x} e operando com as equações resultantes, obtemos o sistema

$$\begin{cases} u_1'(x) + x u_2'(x) & = 0 \\ \\ u_2'(x) & = \ln x \end{cases}$$

e, portanto, $u_1'(x) = -x \ln x$ e $u_2'(x) = \ln x$. Logo,

$$u_1(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{2} \ln x \qquad \text{e} \qquad u_2(x) = \ln x - x.$$

Assim,

$$y_p = e^{2x}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^2 \ln x}{2}\right) + e^{2x}(x^2 \ln x - x^2) = e^{2x}\left(\frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{3x^2}{4}\right)$$

é uma solução particular e, portanto, a solução geral da equação é dada por

$$y = e^{2x} \left(C_1 + C_2 x + \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{3x^2}{4} \right),$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrárias.

Questão 3: a) (1,5 pontos) Determine a solução geral da equação

$$x^2y'' - 2xy' + (2 + x^2)y = 0,$$

sabendo que $y_1 = x \sin x$ é uma solução.

b) (1,5 pontos) Determine a solução geral da equação

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 3x + 5e^x.$$

Solução. a) Vamos procurar outra solução y_2 da forma $y_2(x) = x \sin x u(x)$, com u não constante. Seguirá que $\{y_1, y_2\}$ é linearmente independente e a solução geral será dada por $y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, onde C_1 e C_2 são constante arbitrárias.

Impondo que y_2 seja solução, obtemos

$$x^2(2\cos x - x \sin x)u(x) + 2x^2(\sin x + x \cos x)u'(x) + x^3 \sin x u''(x) -$$
$$2x(\sin x + x \cos x)u(x) - 2x^2 \sin x u'(x) + 2x \sin x u(x) + x^3 \sin x u(x) = 0,$$

isto é,

$$\sin x u''(x) + 2 \cos x u'(x) = 0.$$

Escrevendo $u'(x) = v(x)$, obtemos

$$v'(x) = -\frac{2\cos x}{\sin x}v(x),$$

e podemos tomar $v(x) = e^{-2\ln|\sin x|} = \text{cossec}^2 x$ e, portanto, $u(x) = \int v(x)\,dx = \text{cotg}x$.

Logo, $y_2(x) = x \sin x \ \text{cotg}x = x \cos x$ e a solução geral é

$$y(x) = x(C_1 \sin x + C_2 \cos x),$$

onde C_1 e C_2 são constantes arbitrarias.

b) A equação característica da equação homogênea associada é $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 = 0$ e tem $\lambda = 1$ como raiz tripla. Portanto

$$y_h = C_1e^x + C_2xe^x + x^2C_1e^x$$

é a solução geral da equação homogênea associada.

Para determinar uma solução particular y_p, vamos determinar uma solução particular y_{1p} e y_{2p} de cada uma das equações

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 3x \qquad (1)$$

e

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 5e^x, \qquad (2)$$

respectivamente, e tomar $y_p = y_{1p} + y_{2p}$ (Princípio da Superposição).

Para a equação (1), vamos procurar y_{1p} da forma $y_{1p}(x) = Ax + B$. Substituindo, obtemos

$$3A - Ax - B = 3x$$

e, portanto, $A = -3$ e $B = -9$.

Para a equação (2), vamos procurar y_{2p} da forma $y_{2p}(x) = Dx^3e^x$. Temos

$$y'_{2p} = De^x(3x^2 + x^3) \quad , \quad y''_{2p} = De^x(6x + 6x^2 + x^3) \quad , \quad y'''_{2p} = De^x(6 + 18x + 9x^2 + x^3).$$

Substituindo, obtemos

$$De^x[6 + 18x + 9x^2 + x^3 - 3(6x + 6x^2 + x^3) + 3(3x^2 + x^3) - x^3] = 5e^x$$

e, portanto, $D = \frac{5}{6}$.

Logo, $y_p(x) = -3x - 9 + \frac{5}{6}x^3e^x$ é uma solução particular e a solução geral é dada por

$$y = C_1e^x + C_2xe^x + x^2C_1e^x - 3x - 9 + \frac{5}{6}x^3e^x,$$

onde C_1, C_2 e C_3 são constantes arbitrárias.