Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2o. Semestre 2009

Turma B

1ª Questão: (2,5) Sabendo que a equação

$$(y^2 + e^{-x}\sin y)dx + (2y + xe^{-x}\cos y)dy = 0$$

admite um fator integrante que só depende de x, determine a solução dessa equação com condição inicial $y(0) = 1$.

Solução: Sendo assim, procuremos por uma funçao $g(x)$ tal que $e^{\int g(x)dx} = \mu(x)$.

$$g(x) = -\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{Q} = \frac{(2y + e^{-x}\cos y) - (e^{-x}\cos y - xe^{-x}\cos y)}{2y + xe^{-x}\cos y} = 1$$

Sendo assim, ficamos com:

$$\mu(x) = e^{\int 1dx} = e^x$$

Multiplicando a equação pelo F.I. encontrado:

$$(y^2e^x + \sin y)dx + (2ye^x + x\cos y)dy = 0$$

$$M = (y^2e^x + \sin y)$$

$$N = (2ye^x + x\cos y)$$

Agora resolvendo a equação exata:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = y^2e^x + x\sin y + K(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^x + \cos x + K'(y) = N$$

Sendo assim, encontramos:

$$K'(y) = 0 \Longrightarrow K(y) = \mathbb{C}$$

Para a condiçao de contorno $y(0) = 1$, ficamos com:

$$1 \cdot e^0 + 0 \cdot \sin 1 = \mathbb{C} \Longrightarrow \mathbb{C} = 1$$

E temos a solução da equação diferencial:

$$y^2 e^x + x \sin y = 1$$

2ª Questão.

(a) (1,5) Determine a solução geral da equação

$$yy'' + 2(y')^2 = 0$$

(b) (2,0) Determine a solução geral de

$$y^(iv) + 4y'' + 4y = 0$$

Solução:

(a) Podemos fazer uma mudança de variável que diminui a ordem da equação diferencial:

$$\left(u = \frac{dy}{dx} = y' \Longrightarrow y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dy} \cdot u\right)$$

$$y \cdot \frac{du}{dy} \cdot u + 2u^2 = 0$$

Sendo $u \neq 0$, ficamos com:

$$y \cdot \frac{du}{dy} + 2u = 0 \Longrightarrow -\frac{du}{2u} = \frac{dy}{y}$$

$$-\frac{ln|u|}{2} = \ln|y| + \mathbb{C} \Longrightarrow u = \frac{\mathbb{C}_1}{y^2}$$

Voltando na mudança de variável adotada, temos:

$$y' = \frac{\mathbb{C}_1}{y^2} \Longrightarrow y^3 = \mathbb{C}_1 x + \mathbb{C}_2$$

E a resposta da equação diferencial é dada por (com $\mathbb{C}_1$ e $\mathbb{C}_2 \in \mathbb{R}$):

$$y(x) = \sqrt[3]{\mathbb{C}_1 x + \mathbb{C}_2}$$

(b) O polinômio característico da equação é dado por:

$$t^4 + 4t^2 + 4 = (r^2 + 2)^2$$

E as raízes do polinômio são:

$$t = \pm 2i$$

$$(m = 2)$$

Sendo assim, a resposta da equação é dada por:

$$y(x) = \mathbb{C}_1 \sin 2x + \mathbb{C}_2 \cos 2x + \mathbb{C}_3 x \sin 2x + \mathbb{C}_4 x \cos 2x$$

com $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$, $\mathbb{C}_3$, $\mathbb{C}_4 \in \mathbb{R}$

3ª Questão.

(a) (2,0) Dado que $y_1 = x^2$ é uma solução da equação diferencial

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$$

determine uma segunda solução y_2 linearmente independente com y_1 e dê sua solução geral.

(b) (2,0) Obtenha a solução geral da equação diferencial (para $x > 0$):

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = x^2 \ln x$$

Solução:

(a) Procuremos por uma solução do tipo:

$$y_2(x) = v(x) \cdot y_1(x) = v(x) \cdot x^2$$

$$y_2'(x) = 2xv + x^2v'$$

$$y_2''(x) = 2v + 4xv' + x^2v''$$

Substituindo essas três equações na equação diferencial:

$$x^2(2v + 4xv' + x^2v'') - 2x(2xv + x^2v') + 2vx^2 = 0$$

$$x^4v'' + 2x^3v' = 0$$

$$x^2v'' + 2xv' = 0$$

$$(x^2 \cdot v')' = 0 \Longrightarrow v' = \frac{\mathbb{C}_1}{x^2} \Longrightarrow v(x) = \frac{\mathbb{C}_1}{x} + \mathbb{C}_2$$

E encontramos y_2 como:

$$y_2(x) = x$$

Sendo que a solução geral fica dada por:

$$y(x) = \mathbb{C}_1 x^2 + \mathbb{C}_2 x$$

(b) Pelo Método da Variação dos Parâmetros:

$$\begin{cases} \mathbb{C}_1'(x^2) + \mathbb{C}_2'(x) = 0 \\ \mathbb{C}_1'(2x) + \mathbb{C}_2'(1) = x^2 \ln x \end{cases}$$

O sistema encontrado pode ser resolvido, encontrando:

$$\begin{cases} \mathbb{C}_1' = x \ln x \\ \mathbb{C}_2' = -x^2 \ln x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathbb{C}_1(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{2} - \dfrac{x^2}{4} \\ \mathbb{C}_2(x) = -\dfrac{x^3 \ln x}{3} + \dfrac{x^2}{9} \end{cases}$$

E a solução geral da equação ficao dada por:

$$y(x) = \mathbb{C}_1 x^2 + \mathbb{C}_2 x + \frac{x^4 \ln x}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^4 \ln x}{3} + \frac{x^4}{9}$$

$$y(x) = \mathbb{C}_1 x^2 + \mathbb{C}_2 x + \frac{x^4 \ln x}{6} - \frac{5x^4}{36}$$