Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2o. Semestre 2007

Turma A

1ª Questão:

(a) (1,5 ponto) Determine a solução geral da equação diferencial

$$\left(y^2 - y\sin(x) - \frac{2}{y}\right)dx + (3xy + 2\cos(x))dy = 0$$

(b) (1,5 ponto) Determine uma solução da equação

$$y + x\sec\left(\frac{y}{x}\right) = xy'$$

que satisfaz $y(1) = \frac{\pi}{4}$

Solução:

(a) Como a equação não é exata, vamos procurar por um fator integrante.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y - \sin(x) + \frac{2}{y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 3y - 2\sin(x)$$

Sendo assim, procurando por um fator integrande que só dependa de y:

$$g(y) = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = \frac{y - \sin(x) - \dfrac{2}{y^2}}{y^2 - y\sin(x) - \dfrac{2}{y}} = \frac{1}{y}$$

Desta forma, temos o fator integrante:

$$\mu(y) = e^{\int g(x)dx} \Rightarrow \mu = y$$

Multiplicando a equação pelo fator integrante, ficamos com:

$$\left(y^3 - y^2 \sin(x) - 2\right) dx + \left(3xy^2 + 2y\cos(x)\right) dy = 0$$

Agora, temos uma equação exata, que pode ser facilmente resolvida, obtendo:

$$\phi = y^3 x + y^2 \cos(x) - 2x$$

(b) Trata-se de uma equação com coeficientes homogêneos, sendo que ela pode ser facilmente resolvida fazendo a mudança de variável:

$$\left(\frac{y}{x} = u \Longrightarrow y = ux \Longrightarrow y' = u'x + u\right)$$

$$u + \sec(u) = u'x + u \Longrightarrow u' \cdot \cos(u) = \frac{1}{x}$$

Ficamos, então, com uma equação com variáveis separadas. Integrando-a, obteremos:

$$\sin(u) = \ln(x) + \mathbb{C} \Longrightarrow \sin\left(\frac{y}{x}\right) = \ln(x) + \mathbb{C}$$

Aplicando a CI $y(1) = \frac{\pi}{4}$:

$$\mathbb{C} + \ln(1) = \sin\left(\frac{\frac{\pi}{4}}{1}\right) = \frac{\sqrt{(2)}}{2} \Longrightarrow \mathbb{C} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

E a resolução da equação é:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = \sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

2^{a} Questão:

(a) (1,5 ponto) Sabemos que a função $y_1(x) = e^x$ é soluçao da equação diferencial

$$(x+1)y - (2x+1)y' + xy'' = 0$$

Obtenha outra solução y_2 dessa equação tal que $\{y_1, y_2\}$ é linearmente independente.

(b) (2 pontos) Sabendo que $y_1(x) = e^{-x}$ e $y_2(x) = xe^{-x}$ são soluções da equação diferencial $y'' + 2y' + y = 0$ encontre uma solução da equação diferencial

$$y'' + 2y' + y = \frac{e^{-x}}{x}$$

Solução:

(a) Buscaremos uma solução do tipo

$$y_2(x) = u(x) \cdot y_1(x) = u \cdot e^x$$

Calculando y_2' e y_2'' e substituindo na equação original, ficamos com

$$(x+1)u - (2x+1)(u+u') + x(u + 2u' + u'') = 0$$

$$-u' + xu'' = 0 \Longrightarrow \frac{u''}{u'} = \frac{1}{x}$$

$$\ln |u'| = \ln |x| + \mathbb{C}$$

Como só precisamos de uma solução, escolhemos constantes de integração tais que:

$$u' = x \Longrightarrow u = x^2 \Longrightarrow y_2(x) = x^2 e^x$$

(b) Pelo método da variação de parâmetros teremos:

$$\begin{cases} \text{u}_1' e^{-x} + u_2' x e^{-x} = 0 \\ \text{-u}_1' e^{-x} + u_2' e^{-x}(-x+1) = \dfrac{e^{-x}}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{u}_1' + u_2' x = 0 \\ \text{-u}_1' + u_2'(-x+1) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{u}_1' = -1 \\ \text{u}_2' = \dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{u}_1 = x + \mathbb{C} \\ \text{u}_2 = \ln(x) + \mathbb{C} \end{cases}$$

$$\implies y_p = xe^{-x}\left(1 + \ln(x)\right)$$

3ª Questão:

(a) (1,5 ponto) Determine a solução geral da equação $y^{iv} + 2y''' + 5y'' = 0$.

(b) (2 pontos) Encontre uma solução particular da equação diferencial $y'' - 3y' = 3xe^x + 18\,\text{sen}\,(3x)$.

Solução:

(a) O polinômio característico associado a EDO dada é $p(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 5\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 + 2\lambda + 5)$. Então, $\lambda = 0$ é raiz de $p(\lambda)$ com multiplicidade 2 e deve-se encontrar as soluções de $(\lambda^2 + 2\lambda + 5) = 0$. Por Báskara,

$$\lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$$

Portanto, a solução geral da EDO homogêna dada é

$$y(x) = C_1 + C_2 x + e^{-x}(C_3 \cos(2x) + C_4\,\text{sen}\,(2x)),\ C_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, 3, 4$$

(b) Baseando-se no Princípio da Superposição, vamos procurar duas soluções particulares y_{p1} e y_{p2} que satisfaçam, respectivamente, $y'' - 3y' = 3xe^x$ e $y'' - 3y' = 18\,\text{sen}\,(3x)$.

(b1) Vamos encontrar uma solução particular de $y'' - 3y' = 3xe^x$. A EDO homogênea associada é $y'' - 3y' = 0$, cuja solução geral é $y_g(x) = C_1 + C_2 e^{3x}$, uma vez que o polinôminio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3)$. Vamos procurar uma solução particular $y_{p1}(x)$ através do Método da Variação dos Parâmetros (para utilização deste método, é necessário que o coeficiente de y'' seja unitário, o que já ocorre neste caso). Seja $y_{p1}(x) = c_1(x) + c_2(x)e^{3x}$ uma solução particular. Então, $c_1(x)$ e $c_2(x)$ devem satisfazer ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} c_1' + e^{3x} c_2' = 0 & (1) \\ 3e^{3x} c_2' = 3xe^{3x} & (2) \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema, obtém-se

$$c_1' = -xe^{3x} \Longrightarrow c_1(x) = -x\frac{e^{3x}}{3} + \frac{e^{3x}}{9}$$

$$c_2' = x \Longrightarrow c_2(x) = \frac{x^2}{2}$$

Substituindo c_1 e c_2 em y_{p1}, vem que $y_{p1}(x) = -\dfrac{xe^{3x}}{3} + \dfrac{x^2e^{3x}}{2}$.

(b2) Vamos utilizar o Método dos Coeficientes Indeterminados para encontrar A e B tais que $y_{p2}(x) = A \text{ sen}\,(3x) + B\cos(3x)$ seja uma solução particular de $y'' - 3y' = 18 \text{ sen}\,(3x)$. Temos então

$$y_p'(x) = 3A\cos(3x) - 3B \text{ sen}\,(3x)$$

$$y_p''(x) = -9A \text{ sen}\,(3x) - 9B\cos(3x)$$

Substituindo na EDO, vem que

$$(-9A \text{ sen}\,(3x) - 9B\cos(3x)) - 3(3A\cos(3x) - 3B \text{ sen}\,(3x)) = 18 \text{ sen}\,(3x)$$

Então

$$\begin{cases} 9A + 9B = 18 & (1) \\ -9A - 9B = 0 & (2) \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, chega-se em $A = -1$ e $B = 1$, ou seja, $y_{p2}(x) = -\text{ sen}\,(3x) + \cos(3x)$.

Segundo o Princípio da Superposição, uma solução particular y_p da EDO do exercicio é dada por

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) = -\frac{xe^{3x}}{3} + \frac{x^2e^{3x}}{2} - \text{ sen}\,(3x) + \cos(3x)$$