Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
3a. Prova - 2o. Semestre 2006

Turma A

1ª Questão: Determine a solução geral das equações diferenciais:

(a) (1,5) $(x \cos x)y' + (\cos x + x \text{ sen } x)y = 2x$.

(b) (1,0) $\left(x^3 + \dfrac{3y}{x}\right) + (\ln(x^3) - 2)dy = 0$.

(c) (1,5) $3xyy' + y^2 = 2x^2$.

Solução:

(a)

$$(x \cos x)y' + (\cos x + x \text{ sen } x)y = 2x$$

Dividindo a EDO por $x \cos x$, obtém-se

$$y' + \left(\frac{1}{x} + \tan x\right) y = \frac{2}{\cos x}$$

que é uma EDO linear de primeira ordem. Assim, tem-se que um fator integrante da EDO acima é dado por:

$$e^{\int \left(\frac{1}{x} + \tan x\right) dx} = e^{\ln|x| - ln|\cos x|} = \left|\frac{x}{\cos x}\right| \Longrightarrow \mu(x) = \frac{x}{\cos x}$$

Multiplicando a EDO pelo fator integrante μ, vem que

$$\frac{x}{\cos x} y' + \left(\frac{1}{\cos x} + x\frac{\tan x}{\cos x}\right) y = \frac{2x}{\cos^2 x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\cos x} y\right) = 2x \sec^2 x$$

$$\frac{x}{\cos x} y = 2 \int 2x \sec^2 x dx = 2[x \tan x - \int \tan x dx] = 2[x \tan x + \ln|\cos x| + C_1]$$

$$y(x)=\frac{\cos x}{x}\left(2x\tan x+2\ln|\cos x|+C\right),\ \ C\in\mathbb{R}$$

(b)

$$\left(x^3+\frac{3y}{x}\right)+(\ln(x^3)-2)dy=0$$

Seja $P=P(x,y)=x^3+\dfrac{3y}{x}$ e $Q=Q(x,y)=\ln(x^3)-2$. Então,

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{3}{x}-\frac{3}{x}=0\Longrightarrow \text{EDO é exata.}$$

Vamos então procurar $\varphi(x,y)$ tal que (1) $\varphi_x=x^3+\dfrac{3y}{x}$ e (2) $\varphi_y=\ln(x^3)-2$. De (2),

$$\varphi(x,y)=\int[\ln(x^3)-2]dy=[\ln(x^3)-2]y+k(x)\Longrightarrow\varphi_x=\frac{3}{x}y+k'(x)=^{(1)}x^3+\frac{3y}{x}\Longrightarrow k(x)=\frac{x^4}{4}$$

Portanto, a solução da EDO dada é

$$\varphi(x,y)=C,\ \text{ ou seja, }\frac{x^4}{4}+[\ln(x^3)-2]y=C,\ \ C\in\mathbb{R}$$

(c) $3xyy'+y^2=2x^2\Longrightarrow y'=\dfrac{2x^2-y^2}{3xy}=\dfrac{2}{3}\dfrac{x}{y}-\dfrac{1}{3}\dfrac{y}{x}$ é função homogênea de grau zero. Seja $z=\dfrac{y}{x}$:

$$z+x\frac{dz}{dx}=\frac{2}{3z}-\frac{1}{3}z\Longrightarrow x\frac{dz}{dx}=\frac{2-4z^2}{3z}\Longrightarrow\int\frac{3z}{2-4z^2}dz=\int\frac{1}{x}dx$$

$$\frac{-3}{8}\ln|2-4z^2|=\ln|x|+k_1\Longrightarrow\ln|2-4z^2|=\frac{-8}{3}\ln|x|+k_2\Longrightarrow|2-4z^2|=|x|^{\frac{-8}{3}}e^{k_2}$$

Voltando para a variável x através de $z=\dfrac{y}{x}$, tem-se que as soluções da EDO dada são as funções $y=y(x)$ deriváveis, tais que

$$\left(2-4\frac{y^2}{x^2}\right)x^{\frac{8}{3}}=C,\ \ C\in\mathbb{R}$$

2ª Questão: (3,0)

(a) (1,5) A função $y_1(x) = x^2$ é solução da equação $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$. Determine a solução dessa equação.

(b) (1,5) Determine a solução geral da equação $x^2y'' - 4xy' + 6y = ln(x^2)$.

Solução:

(a) Vamos procurar uma solução da forma $y_2(x) = v(x).y_1(x) = v(x).x^2$. Substituindo y_2 na EDO dada, vem que

$$x^2(v''x^2 + 4xv' + 2v) - 4x(v'x^2 + 2xv) + 6(vx^2) = 0 \Longrightarrow v''x^4 = 0$$

$$v'' = 0 \Longrightarrow v' = K_1 \Longrightarrow v(x) = K_1x + K_2,\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}$$

Tomando $K_1 = 1$ e $K_2 = 0$, vem que $y_2(x) = x^3$. Assim, a solução geral da EDO dada é

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x^3,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(b) Sabendo que $y_h(x) = C_1x^2 + C_2x^3$ é solução da EDO homogênea associada à equação $x^2y'' - 4xy' + 6y = ln(x^2)$, pode-se encontrar uma solução particular $y_p(x)$ através do Método da Variação dos Parâmetros (para utilização deste método, é necessário que o coeficiente de y'' seja unitário; assim, deve-se dividir a EDO por x^2). Seja $y_p(x) = c_1(x)x^2 + c_2(x)x^3$ uma solução particular. Então, $c_1(x)$ e $c_2(x)$ devem satisfazer ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x^2c_1' + x^3c_2' = 0 & (1) \\ 2xc_1' + 3x^2c_2' = \frac{\ln(x^2)}{x^2} & (2) \end{cases}$$

Resolvendo-se o sistema, obtém-se

$$c_1' = -\frac{\ln(x^2)}{x^3} = -\frac{2\ln(x)}{x^3} \Longrightarrow c_1(x) = \frac{1}{x^2}\left(\ln(x) + \frac{1}{2}\right)$$

$$c_2' = \frac{\ln(x^2)}{x^4} = \frac{2\ln(x)}{x^4} \Longrightarrow c_2(x) = \frac{1}{x^3}\left(\frac{-2\ln(x)}{3} - \frac{2}{9}\right)$$

Substituindo c_1 e c_2 em y_p, vem que $y_p(x) = \frac{\ln(x)}{3} + \frac{5}{18}$. Então, a solução geral da EDO é

$$y(x) = \frac{\ln(x)}{3} + \frac{5}{18} + C_1x^2 + C_2x^3,\ \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3ª Questão: (3,0)

(a) Determine a solução geral da equação $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = 0$.

(b) Determine a solução geral da equação $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x}$.

Solução:

(a) O polinômio característico associado a EDO dada é $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 3\lambda + 9$. Por inspeção, obtém-se que $p(\lambda = -1) = 0$. Dividindo-se $p(\lambda)$ por $(\lambda + 1)$, tem-se que $p(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda^2 - 6\lambda + 9) = (\lambda + 1)(\lambda - 3)^2$. Portanto, e^{-x}, e^{3x} e xe^{3x} são soluções linearmente independentes. Logo, a solução geral da EDO é

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

(b) Como e^{-x} é solução da equação homogênea, vamos procurar uma solução particular da forma $y_p(x) = Axe^{-x}$. Temos então

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= Ae^{-x} - Axe^{-x} \\ y_p''(x) &= -2Ae^{-x} + Axe^{-x} \\ y_p'''(x) &= 3Ae^{-x} - Axe^{-x} \end{aligned}$$

Substituindo na EDO dada, vem que

$$(3Ae^{-x} - Axe^{-x}) - 5(-2Ae^{-x} + Axe - x) + 3(Ae^{-x} - Axe^{-x}) + 9(Axe^{-x}) = 16Ae^{-x} = e^{-x} \Longrightarrow A = \frac{1}{16}$$

Então, $y_p(x) = \frac{1}{16}xe^{-x}$ é uma solução particular e a solução geral da EDO é dada por

$$y(x) = \frac{1}{16}xe^{-x}C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + C_3xe^{3x},\ C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$