Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2011 - 10/10/2011 Turma A

Questão 1.

(a) Escreva $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{8+x^3}\,dx$ como soma de uma série numérica.

(b) Obtenha um valor aproximado de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{8+x^3}\,dx$ com erro inferior a 10^{-3} .

Solução.

(a) Primeiro, escrevemos

$$f(x) = \frac{1}{8+x^3} = \frac{1}{8}\,\frac{1}{1+(\frac{x}{2})^3} = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{2^{3n}}$$

como uma série de potências absolutamente convergente quando $|\frac{x}{2}| < 1$, isto é, quando $|x| < 2$. Portanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{8+x^3}\,dx = \frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^n x^{3n}}{2^{3n}}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{(3n+1)2^{3(n+1)}}\Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3(n+1)}}.$$

(b) Como $\int_0^1 \frac{1}{8+x^3}\,dx$ é a soma de uma série alternada, escrevendo

$$\int_0^1 \frac{1}{8+x^3}\,dx = \sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{(3n+1)2^{3(n+1)}} + \varepsilon_k,$$

temos $\varepsilon_k < |a_{k+1}|$. É suficiente determinar k de modo que $|a_{k+1}| = \frac{1}{(3k+4)2^{3(k+2)}} < 10^{-3}$, isto é,

$$(3k+4)2^{3(k+2)} > 10^3.$$

Podemos escolher $k = 1$ (o lado esquerdo da desigualdade acima é $7 \cdot 8^3 = 3584 > 10^3 =$ lado direito).

Logo,

$$\int_0^1 \frac{1}{8+x^3}\,dx \approx \sum_{n=0}^{1}\frac{(-1)^n}{(3n+1)8^{n+1}} = \frac{1}{8} - \frac{1}{4.8^2} = \frac{31}{256} = 0,12109$$

com erro $< 10^{-3}$.

[Obs. O valor *exato* dessa integral é $\frac{1}{72}(\pi\sqrt{3} + \ln 27)$, aproximadamente igual a 0,12135.]

Questão 2: (a) Usando série de Taylor, obtenha um valor aproximado de $e^{\frac{1}{3}}$ com erro inferior a 10^{-4}.
(b) Determine $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_0^\pi (|\cos x| - c_1 \text{sen}\, x - c_2 \text{sen}\, 2x)^2\, dx$$

assuma menor valor possível.

Solução:

(a) Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$e^{\frac{1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{3^n n!} + E_N.$$

Agora,

$$\text{erro} = E_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n n!} < \frac{1}{(N+1)!} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{(N+1)!} \frac{\frac{1}{3^{N+1}}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2(N+1)!3^N}.$$

Para que $E_N < 10^{-4}$ é suficiente tomar N de modo que $2(N+1)!3^N > 10^4$.

Para $N = 4$ temos $2 \cdot 120 \cdot 81 = 120 \cdot 162 > 10^4$. Portanto $N = 4$ serve e obtemos

$$e^{\frac{1}{3}} \simeq \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{3^n n!}, \text{ com erro } < 10^{-4}.$$

(b) Seja g a extensão ímpar de $|\cos x|$ em $[-\pi; \pi]$, isto é,

$$g(x) = \begin{cases} |\cos x| & \text{se } 0 < x < \pi \\ -|\cos x| & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Então,

$$\int_0^\pi (|\cos x| - c_1 \text{sen}\, x - c_2 \text{sen}\, 2x)^2\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - c_1 \text{sen}\, x - c_2 \text{sen}\, 2x)^2\, dx$$

e, portanto, os valores de c_1 e c_2 que minimizam a integral são os coeficientes de Fourier da função g. Temos

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \text{sen}\, x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\cos x| \text{sen}\, x\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos x \text{sen}\, x\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \text{sen}\, x\, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \Big[\frac{\text{sen}^2 x}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\text{sen}^2 x}{2} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \Big] = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \text{sen}\, 2x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\cos x| \text{sen}\, 2x\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos x \text{sen}\, 2x\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \text{sen}\, 2x\, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \Big[-\frac{2\cos^3 x}{3} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{2\cos^3 x}{3} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \Big] = \frac{2}{\pi} \Big[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \Big] = 0. \end{aligned}$$

Questão 3: Considere a função $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ \pi - x, & \text{se } 0 \le x < \pi. \end{cases}$

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(c) Calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

(d) Calcule a soma da série para $x = 7$.

Solução:

(a) Os coeficientes de Fourier de f são

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} x\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \pi x\Big|_{0}^{\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\Big] = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{x\text{sen}\,(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\text{sen}\,(nx)}{n}\,dx + (\pi - x)\frac{\text{sen}\,(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\frac{\text{sen}\,(nx)}{n}\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\Big] = \frac{1}{n^2\pi}\Big[1 - (-1)^n - (-1)^n + 1\Big] = \frac{2}{n^2\pi}\Big[1 - (-1)^n\Big]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen}\,(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} x\text{sen}\,(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\text{sen}\,(nx)\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{-x\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx - (\pi - x)\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{1}{n}(0 - (-\pi)(-1)^n) + \frac{1}{n}\frac{\text{sen}\,(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}(0 - \pi) - \frac{1}{n}\frac{\text{sen}\,(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi}\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{\pi}{n}\Big] = \frac{1}{n}\Big[1 - (-1)^n\Big]. \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de f é

$$S_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos\Big((2n+1)x\Big) + \frac{2}{2n+1}\text{sen}\,\Big((2n+1)x\Big).$$

(b) Fazendo $x = 0$, obtemos $S_f(0) = \frac{1}{2}[f(0+) + f(0-)] = \frac{\pi}{2}$, isto é,

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

e, portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Agora, fazendo $x = \frac{\pi}{2}$, obtemos $S_f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\text{sen}\,\Big((2n+1)\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2} \text{ e portanto } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Aplicando a Identidade de Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx,$$

obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2} = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} x^2\,dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)^2\,dx\Big],$$

isto é,

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{0} + \int_0^{\pi}(\pi^2 - 2\pi x + x^2)\,dx\Big]$$

Portanto,

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = -4\cdot\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\pi^3}{3} + \pi^2 x\Big|_0^{\pi} - \frac{2\pi x^2}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}\Big] = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{2}{3}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

(d) Como f é uma função de classe C^1 por partes, pelo teorema da convergência, a soma da série de Fourier $S_f(x)$ converge para a extensão 2π-periódica da função g definida em $[-\pi,\pi]$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f \text{ é contínua em } x \\ \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)], & \text{se } f \text{ é descontínua em } x \\ \frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)], & \text{se } x = \pm\pi. \end{cases}$$

Como $2\pi < 7 < 3\pi$, temos $0 < 7-2\pi < \pi$ e, portanto, $S_f(7) = S_f(7-2\pi) = f(7-2\pi) = \pi-(7-2\pi) = 3\pi - 7$.

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2011 - 10/10/2011 Turma B

Questão 1.

(a) Escreva $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{27+x^3}\,dx$ como soma de uma série numérica.

(b) Obtenha um valor aproximado de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{27+x^3}\,dx$ com erro inferior a 10^{-3} .

Solução.

(a) Primeiro, escrevemos

$$f(x) = \frac{1}{27+x^3} = \frac{1}{27}\,\frac{1}{1+(\frac{x}{3})^3} = \frac{1}{27}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{3^{3n}}$$

como uma série de potências absolutamente convergente quando $|\frac{x}{3}| < 1$, isto é, quando $|x| < 3$. Portanto,

$$\int_0^1 \frac{1}{27+x^3}\,dx = \frac{1}{27}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 \frac{(-1)^n x^{3n}}{3^{3n}}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{(3n+1)3^{3(n+1)}}\Big|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3n+1)3^{3(n+1)}}.$$

(b) Como $\int_0^1 \frac{1}{27+x^3}\,dx$ é a soma de uma série alternada, escrevendo

$$\int_0^1 \frac{1}{27+x^3}\,dx = \sum_{n=0}^{k}\frac{(-1)^n}{(3n+1)3^{3(n+1)}} + \varepsilon_k,$$

temos $\varepsilon_k < |a_{k+1}|$. É suficiente determinar k de modo que $|a_{k+1}| = \frac{1}{(3k+4)3^{3k+6}} < 10^{-3}$, isto é,

$$(3k+4)3^{3k+6} > 10^3.$$

Podemos escolher $k = 0$ (o lado esquerdo da desigualdade acima é $4 \cdot 3^6 = 2016 > 10^3 =$ lado direito).

Logo,

$$\int_0^1 \frac{1}{27+x^3}\,dx \simeq \frac{1}{27} = 0,037037$$

com erro $< 10^{-3}$.

[Obs. O valor *exato* dessa integral é $\frac{1}{162}\left[\pi\sqrt{3} + 3\ln(\frac{16}{7}) - 6\sqrt{3}\arctan(\frac{1}{3\sqrt{3}})\right]$, aproximadamente igual a 0,0367012.]

Questão 2: (a) Usando série de Taylor, obtenha um valor aproximado de $e^{\frac{1}{4}}$ com erro inferior a 10^{-4}.

(b) Determine $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\int_0^\pi (|\cos x| - c_1 \mathrm{sen}\, x - c_2 \mathrm{sen}\, 2x)^2\, dx$$

assuma menor valor possível.

Solução:

(a) Como $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, temos

$$e^{\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n n!} = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4^n n!} + E_N.$$

Agora,

$$\text{erro} = E_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{4^n n!} < \frac{1}{(N+1)!} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{(N+1)!} \frac{\frac{1}{4^{N+1}}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3(N+1)!4^N}.$$

Para que $E_N < 10^{-4}$ é suficiente tomar N de modo que $3(N+1)!4^N > 10^4$.

Para $N = 4$ temos $3 \cdot 120 \cdot 256 = 120 \cdot 768 > 10^4$. Portanto $N = 4$ serve e obtemos

$$e^{\frac{1}{3}} \simeq \sum_{n=0}^{4} \frac{1}{4^n n!}, \text{ com erro } < 10^{-4}.$$

(b) Os valores de c_1 e c_2 que minimizam a integral são os coeficientes da série de senos da função $f(x) = |\cos x|$.

(b) Seja g a extensão ímpar de $|\cos x|$ em $[-\pi; \pi]$, isto é,

$$g(x) = \begin{cases} |\cos x| & \text{se } 0 < x < \pi \\ -|\cos x| & \text{se } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Então,

$$\int_0^\pi (|\cos x| - c_1 \mathrm{sen}\, x - c_2 \mathrm{sen}\, 2x)^2\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (g(x) - c_1 \mathrm{sen}\, x - c_2 \mathrm{sen}\, 2x)^2\, dx$$

e, portanto, os valores de c_1 e c_2 que minimizam a integral são os coeficientes de Fourier da função g. Temos

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \mathrm{sen}\, x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\cos x| \mathrm{sen}\, x\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos x \mathrm{sen}\, x\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \mathrm{sen}\, x\, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \Big[\frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\mathrm{sen}^2 x}{2} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \Big] = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c_2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \mathrm{sen}\, 2x\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi |\cos x| \mathrm{sen}\, 2x\, dx = \frac{2}{\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos x \mathrm{sen}\, 2x\, dx - \int_{\pi/2}^{\pi} \cos x \mathrm{sen}\, 2x\, dx \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \Big[-\frac{2\cos^3 x}{3} \Big|_0^{\pi/2} + \frac{2\cos^3 x}{3} \Big|_{\pi/2}^{\pi} \Big] = \frac{2}{\pi} \Big[\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \Big] = 0. \end{aligned}$$

Questão 3: Considere a função $f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } -\pi \le x < 0 \\ \pi - x, & \text{se } 0 \le x < \pi. \end{cases}$

(a) Determine a série de Fourier de f.

(b) Calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ e $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

(c) Calcule $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}$.

(d) Calcule a soma da série para $x = 8$.

Solução:

(a) Os coeficientes de Fourier de f são

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} x\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\,dx\Big] = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{0} + \pi x\Big|_{0}^{\pi} - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{\pi}\Big] = 0$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} x\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\cos(nx)\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{x\text{sen}\,(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\text{sen}\,(nx)}{n}\,dx + (\pi - x)\frac{\text{sen}\,(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi} + \int_{0}^{\pi}\frac{\text{sen}\,(nx)}{n}\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{\cos(nx)}{n^2}\Big|_{0}^{\pi}\Big] = \frac{1}{n^2\pi}\Big[1 - (-1)^n - (-1)^n + 1\Big] = \frac{2}{n^2\pi}\Big[1 - (-1)^n\Big]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\text{sen}\,(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} x\text{sen}\,(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi}(\pi - x)\text{sen}\,(nx)\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[\frac{-x\cos(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx - (\pi - x)\frac{\cos(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi} - \int_{0}^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}\,dx\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{1}{n}(0 - (-\pi)(-1)^n) + \frac{1}{n}\frac{\text{sen}\,(nx)}{n}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n}(0 - \pi) - \frac{1}{n}\frac{\text{sen}\,(nx)}{n}\Big|_{0}^{\pi}\Big] \\ &= \frac{1}{\pi}\Big[-\frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{\pi}{n}\Big] = \frac{1}{n}\Big[1 - (-1)^n\Big]. \end{aligned}$$

Portanto, a série de Fourier de f é

$$S_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)^2}\cos\Big((2n+1)x\Big) + \frac{2}{2n+1}\text{sen}\,\Big((2n+1)x\Big).$$

(b) Fazendo $x = 0$, obtemos $S_f(0) = \frac{1}{2}[f(0+) + f(0-)] = \frac{\pi}{2}$, isto é,

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

e, portanto,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Agora, fazendo $x = \frac{\pi}{2}$, obtemos $S_f(\frac{\pi}{2}) = f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, isto é,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{2n+1}\text{sen}\,\Big((2n+1)\frac{\pi}{2}\Big) = \frac{\pi}{2} \text{ e portanto } \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Aplicando a Identidade de Parseval

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2\,dx,$$

obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{16}{\pi^2(2n+1)^4} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{(2n+1)^2} = \frac{1}{\pi}\Big[\int_{-\pi}^{0} x^2\,dx + \int_0^{\pi}(\pi - x)^2\,dx\Big],$$

isto é,

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{0} + \int_0^{\pi}(\pi^2 - 2\pi x + x^2)\,dx\Big]$$

Portanto,

$$\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = -4\cdot\frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{\pi}\Big[\frac{\pi^3}{3} + \pi^2 x\Big|_0^{\pi} - \frac{2\pi x^2}{2}\Big|_0^{\pi} + \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi}\Big] = -\frac{\pi^2}{2} + \frac{2}{3}\pi^2 = \frac{\pi^2}{6}.$$

Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

(d) Como f é uma função de classe C^1 por partes, pelo teorema da convergência, a soma da série de Fourier $S_f(x)$ converge para a extensão 2π-periódica da função g definida em $[-\pi,\pi]$ por

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f \text{ é contínua em } x \\ \frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)], & \text{se } f \text{ é descontínua em } x \\ \frac{1}{2}[f(-\pi+) + f(\pi-)], & \text{se } x = \pm\pi. \end{cases}$$

Como $2\pi < 8 < 3\pi$, temos $0 < 8-2\pi < \pi$ e, portanto, $S_f(8) = S_f(8-2\pi) = f(8-2\pi) = \pi-(8-2\pi) = 3\pi - 8$.