MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
Escola Politecnica - 2a. Prova - 18/10/2010

Turma A

1ª Questão (3,0)

a) Seja

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos(t^2) - 1}{t^2} & \text{se} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t = 0 \end{cases}$$

Determine a expansão em série de potências para a função $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ em torno de $x_0 = 0$.

b) Calcule uma aproximação para $F(1)$ com erro inferior a 10^{-3}.

Solução:

(a) Sabe-se que:

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Assim escolhendo $y = t^2$, temos:

$$\cos(t^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{(2n)!}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \cos(t^2) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n}}{(2n)!}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\cos t^2 - 1}{t^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n-2}}{(2n)!}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0$$

Logo:

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad F(x) &= \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{4n-2}}{(2n)!} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\int_0^x \frac{t^{4n-2}}{(2n)!} dt \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t^{4n-1}}{(4n-1) \cdot (2n)!} \right) \Bigg|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n-1}}{(4n-1) \cdot (2n)!} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{4n-1}}{(4n-1) \cdot (2n)!}}$$

(b) Para $x = 1$:

$$F(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(4n-1) \cdot (2n)!}$$

Tomando $a_n = \dfrac{1}{(4n-1)\cdot(2n)!}$, vemos que para qualquer n>0, a_n é positiva, decrescente, e tem limite nulo no infinito.

Logo $F(1)$ converge pelo critério das séries alternadas e se aproximarmos $F(1)$ da seguinte maneira:

$$F(1) \simeq \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \cdot \frac{1}{(4n-1)\cdot(2n)!}$$

cometemos um erro determinado por:

$$|\text{Erro}| < a_{k+1} = \frac{1}{(4k+3)\cdot(2k+2!}$$

Para que este erro seja sempre menor que 10^{-3}, então:

$$\frac{1}{(4k+3)\cdot(2k+2)!} < 10^{-3}$$

$$\Rightarrow (4k+3)\cdot(2k+2)! > 1000$$

Logo, precisamos escolher k que satisfaça a inequação acima.
Escolhendo k = 1, temos que $(4k+3)\cdot(2k+2)! = 7\cdot 4! = 168 < 1000$
Escolhendo k = 2, temos que $(4k+3)\cdot(2k+2)! = 11\cdot 6! = 7920 > 1000$
Assim $k \geq 2$ satisfaz a inequação e portanto:

$$\boxed{F(1) \simeq \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \cdot \frac{1}{(4n-1)\cdot(2n)!} = -\frac{1}{3\cdot 2!} + \frac{1}{7\cdot 4!}}$$

2ª Questão: (3,5)

a) Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n (\ln n)^2}$$

b) Determine a expansão em série de potências da função $f(x) = \ln(x-1)$ em torno de $x_0 = 3$. Qual o raio de convergência? Calcule $f^{(457)}(3)$.

c) Dê a fórmula (sem calcular as integrais resultantes) dos coeficientes $b_1, ..., b_n$ que minimizam a expressão

$$\int_0^{\pi} \left[e^{x^3} - \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen}(kx) \right]^2 dx$$

Indique **claramente** a extensão adotada!

Solução:

(a) Do enunciado temos que $a_n = \dfrac{x^{2n}}{4^n n (\ln n)^2}$, assim usando o critério da razão:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2} \cdot 4^n n (\ln n)^2}{4^{n+1}(n+1)(\ln(n+1))^2} \cdot x^{2n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2} \right) \cdot \frac{x^2}{4}$$

Calculando os limites:
(I)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

(II)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2} = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right]^2$$

Tomando $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$, temos que:

$$\left[\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right]^2 = \left[\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \right]^2 = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} \right]^2 = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \right]^2 = 1$$

Portanto:

$$q = \frac{x^2}{4}$$

Para a série convergir absolutamente $q < 1$, então $x^2 < 4$, isto é $|x| < 2$ então o raio de convergência é:

$$\boxed{R = 2}$$

Para os extremos ($x = \pm 2$), obtemos a série:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Considere $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^2 x}$. Note que para $x > 1$, f é contínua, decrescente, positiva e com limite nulo no infinito. Como

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \to \infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \to \infty} \left(\frac{-1}{\ln x} \right) \Big|_2^b = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}$$

temos que a série converge pelo critério integral. Logo o intervalo de convergencia é: $\boxed{[-2, 2]}$

(b) A série que queremos obter é do tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$$

Portanto

$$f(x) = \ln(x-1) = \ln[(x-3)+2] \quad \text{e} \quad f'(x) = \frac{1}{(x-3)+2} = \frac{\frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{x-3}{2}\right)}$$

Vemos que $f'(x)$ é a soma de uma PG de razão $q = -\left(\dfrac{x-3}{2}\right)$ e primeiro termo $\dfrac{1}{2}$. Para tanto o módulo da razão tem de ser menor que 1, logo

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot \left[-\left(\frac{x-3}{2} \right) \right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}}$$

e

$$\left| \frac{x-3}{2} \right| < 1 \Longrightarrow |x-3| < 2 \Longrightarrow \boxed{\text{R=2}}$$

Integrando

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx + C = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}} \right) dt + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int \frac{(x-3)^n}{2^{n+1}} dt + C \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} + C \quad , \quad |x-3| < 2 \end{aligned}$$

Calculando para $x = 3$ obtemos $C = \ln 2$ e portanto:

$$\boxed{f(x) = \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot (n+1)} \quad , \quad |x-3| < 2}$$

Note que para calcular a_{457} temos que escolher $n = 456$ pois a_n multiplica x^n e a série de potências que calculamos tem x^{n+1} no termo geral, assim como

$$a_{457} = \frac{f^{(457)}(3)}{457!} \Rightarrow \frac{1}{457 \cdot 2^{457}} = \frac{f^{(457)}(3)}{457!} \Rightarrow \boxed{f^{(457)}(3) = \frac{456!}{2^{457}}}$$

c) Considere $f(x) = e^{x^3}$ para $0 < x < \pi$. Seja $\tilde{f}$ a expansão ímpar de f no intervalo $[-\pi, \pi]$. A série de Fourier de $\tilde{f}$ dará uma expansão para f em $[0, \pi]$ em série de senos. Logo:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \operatorname{sen}(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(kx) dx \Rightarrow \boxed{b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x^3} \operatorname{sen}(kx) dx \quad , \quad 1 \leq k \leq n}$$

3ª Questão: (3,5)

a) Determine a série de senos da função $f(x) = \pi - x$, $0 < x < \pi$.

b) Seja $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a soma da série obtida no item (a). Determine $S(x)$ e esboce o gráfico da função $y = S(x)$.

c) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solução:

(a) Seja $\tilde{f}$ a expansão ímpar de f no intervalo $[-\pi, \pi]$. A série de Fourier de $\tilde{f}$ dará uma série senos para f em $[0, \pi]$. Logo:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,\text{sen}\,(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\,\text{sen}\,(kx)dx$$

Usando o método da integral por partes, com $u = \pi - x \Rightarrow u' = -1$ e $v' = \text{sen}\,(kx) \Rightarrow v = -\frac{\cos(kx)}{k}$:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left[-(\pi - x)\frac{\cos(kx)}{k}\bigg|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[\pi.\frac{1}{k} - \frac{\text{sen}\,(kx)}{k^2}\bigg|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{k}\right) = \frac{2}{k}$$

Logo a série de senos de f é dada por:

$$\boxed{S(x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,(kx)}{k}}$$

b) O gráfico da soma da série de senos é dado por:
Pelo teorema da convergência, no intervalo de $[-\pi, \pi]$, $S(x)$ vale $\tilde{f}(x)$ nos pontos onde $\tilde{f}$ é contínua e vale a média dos limites laterais nos pontos de continuidade.

Assim de $[-\pi, \pi]$, podemos escrever $S(x)$ como:

$$S(x) = \begin{cases} \pi - x & , \quad \text{se} \quad 0 < x \leq \pi \\ -\pi - x & , \quad \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 0 & , \quad \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

e nos demais intervalos do tipo $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ consideramos a extensão periódica de S definida em $[-\pi, \pi]$.

Ou, expandindo S(x), para todo eixo real, então:

$$S(x) = \begin{cases} \pi - (x - 2k\pi) & , \quad \text{se} \quad 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \\ -\pi - (x - 2k\pi) & , \quad \text{se} \quad -\pi + 2k\pi \leq x < 2k\pi \\ 0 & , \quad \text{se} \quad x = 2k\pi \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Pela identidade de Parseval:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx$$

Assim, no caso do exercício:

$$
\begin{aligned}
4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\tilde{f}(x)\right]^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x)]^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)^2dx \\
&= -\frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{(\pi-x)^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}
$$

MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
Escola Politecnica - 2a. Prova - 18/10/2010

Turma B

1ª Questão (3,0)

a) Seja

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{\cos(t^4) - 1}{t^4} & \text{se} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t = 0 \end{cases}$$

Determine a expansão em série de potências para a função $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ em torno de $x_0 = 0$.

b) Calcule uma aproximação para $F(1)$ com erro inferior a 10^{-3}.

Solução:

(a) Sabe-se que:

$$\cos y = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}, \qquad \forall y \in \mathbb{R}$$

Assim escolhendo $y = t^4$, temos:

$$\cos(t^4) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{8n}}{(2n)!}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \cos(t^4) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{8n}}{(2n)!}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{\cos t^4 - 1}{t^4} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{8n-4}}{(2n)!}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}, t \neq 0$$

Logo:

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad F(x) &= \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{8n-4}}{(2n)!} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\int_0^x \frac{t^{8n-4}}{(2n)!} dt \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{t^{8n-3}}{(8n-3) \cdot (2n)!} \right) \Bigg|_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{8n-3}}{(8n-3) \cdot (2n)!} \end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{8n-3}}{(8n-3) \cdot (2n)!}}$$

(b) Para $x = 1$:

$$F(1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(8n-3) \cdot (2n)!}$$

Tomando $a_n = \dfrac{1}{(8n-3)\cdot(2n)!}$, vemos que para qualquer n>0, a_n é positiva, decrescente, e tem limite nulo no infinito.

Logo $F(1)$ converge pelo critério das séries alternadas e se aproximarmos $F(1)$ da seguinte maneira:

$$F(1) \simeq \sum_{n=1}^{k} (-1)^n \cdot \frac{1}{(8n-3)\cdot(2n)!}$$

cometemos um erro determinado por:

$$|\text{Erro}| < a_{k+1} = \frac{1}{(8k+5)\cdot(2k+2!}$$

Para que este erro seja sempre menor que 10^{-3}, então:

$$\frac{1}{(8k+5)\cdot(2k+2)!} < 10^{-3}$$

$$\Rightarrow (8k+5)\cdot(2k+2)! > 1000$$

Logo, precisamos escolher k que satisfaça a inequação acima.
Escolhendo k = 1, temos que $(8k+5)\cdot(2k+2)! = 13\cdot 4! = 312 < 1000$
Escolhendo k = 2, temos que $(8k+5)\cdot(2k+2)! = 21\cdot 6! = 15120 > 1000$
Assim $k \geq 2$ satisfaz a inequação e portanto:

$$\boxed{F(1) \simeq \sum_{n=1}^{2} (-1)^n \cdot \frac{1}{(8n-3)\cdot(2n)!} = -\frac{1}{5\cdot 2!} + \frac{1}{13\cdot 4!}}$$

2ª Questão: (3,5)

a) Determine o raio de convergência e o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n}}{9^n n(\ln n)^2}$$

b) Determine a expansão em série de potências da função $f(x) = \ln(x-1)$ em torno de $x_0 = 4$. Qual o raio de convergência? Calcule $f^{(457)}(4)$.

c) Dê a fórmula (sem calcular as integrais resultantes) dos coeficientes $b_1, ..., b_n$ que minimizam a expressão

$$\int_0^{\pi} \left[e^{x^2} - \sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{sen}(kx) \right]^2 dx$$

Indique **claramente** a extensão adotada!

Solução:

(a) Do enunciado temos que $a_n = \dfrac{x^{2n}}{9^n n(\ln n)^2}$, assim usando o critério da razão:

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2} \cdot 9^n n(\ln n)^2}{9^{n+1}(n+1)(\ln(n+1))^2} \cdot x^{2n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2} \right) \cdot \frac{x^2}{9}$$

Calculando os limites:
(I)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

(II)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^2}{(\ln(n+1))^2} = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right]^2$$

Tomando $f(x) = \dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$, temos que:

$$\left[\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \right]^2 = \left[\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\ln(x+1)} \right]^2 = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{1/(n+1)} \right]^2 = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \right]^2 = 1$$

Portanto:

$$q = \frac{x^2}{9}$$

Para a série convergir absolutamente $q < 1$, então $x^2 < 9$, isto é $|x| < 3$ então o raio de convergência é:

$$\boxed{R = 3}$$

Para os extremos $(x = \pm 3)$, obtemos a série:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Considere $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^2 x}$. Note que para $x > 1$, f é contínua, decrescente, positiva e com limite nulo no infinito. Como

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{-1}{\ln x}\right)\Bigg|_2^b = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}$$

temos que a série converge pelo critério integral. Logo o intervalo de convergencia é: $\boxed{[-3, 3]}$

(b) A série que queremos obter é do tipo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-4)^n$$

Portanto

$$f(x) = \ln(x-1) = \ln[(x-4)+3] \quad \text{e} \quad f'(x) = \frac{1}{(x-4)+3} = \frac{\frac{1}{3}}{1 + \left(\frac{x-4}{3}\right)}$$

Vemos que $f'(x)$ é a soma de uma PG de razão $q = -\left(\dfrac{x-4}{3}\right)$ e primeiro termo $\dfrac{1}{3}$. Para tanto o módulo da razão tem de ser menor que 1, logo

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot \left[-\left(\frac{x-4}{3}\right)\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^n}{3^{n+1}}$$

e

$$\left|\frac{x-4}{3}\right| < 1 \Longrightarrow |x-4| < 3 \Longrightarrow \boxed{\text{R=3}}$$

Integrando

$$\begin{aligned} f(x) &= \int f'(x)dx + C = \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^n}{3^{n+1}}\right) dt + C = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int \frac{(x-4)^n}{3^{n+1}} dt + C \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}} + C \quad , \quad |x-4| < 3 \end{aligned}$$

Calculando para $x = 4$ obtemos $C = \ln 3$ e portanto:

$$\boxed{f(x) = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-4)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1} \cdot (n+1)} \quad , \quad |x-4| < 3}$$

Note que para calcular a_{457} temos que escolher $n = 456$ pois a_n multiplica x^n e a série de potências que calculamos tem x^{n+1} no termo geral, assim como

$$a_{457} = \frac{f^{(457)}(3)}{457!} \Rightarrow \frac{1}{457 \cdot 3^{457}} = \frac{f^{(457)}(3)}{457!} \Rightarrow \boxed{f^{(457)}(3) = \frac{456!}{3^{457}}}$$

c) Considere $f(x) = e^{x^2}$ para $0 < x < \pi$. Seja $\tilde{f}$ a expansão ímpar de f no intervalo $[-\pi, \pi]$. A série de Fourier de $\tilde{f}$ dará uma expansão para f em $[0, \pi]$ em série de senos. Logo:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) \operatorname{sen}(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}(kx) dx \Rightarrow \boxed{b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi e^{x^2} \operatorname{sen}(kx) dx \quad , \quad 1 \le k \le n}$$

3ª Questão: (3,5)

a) Determine a série de senos da função $f(x) = x - \pi$, $0 < x < \pi$.

b) Seja $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a soma da série obtida no item (a). Determine $S(x)$ e esboce o gráfico da função $y = S(x)$.

c) Calcule a soma da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Solução:

(a) Seja $\tilde{f}$ a expansão ímpar de f no intervalo $[-\pi, \pi]$. A série de Fourier de $\tilde{f}$ dará uma série senos para f em $[0, \pi]$. Logo:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\,\text{sen}\,(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,(kx)dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (x-\pi)\,\text{sen}\,(kx)dx$$

Usando o método da integral por partes, com $u = x - \pi \Rightarrow u' = 1$ e $v' = \text{sen}\,(kx) \Rightarrow v = -\frac{\cos(kx)}{k}$:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\left[-(x-\pi)\frac{\cos(kx)}{k}\Bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}dx\right] = \frac{2}{\pi}\left[-\pi.\frac{1}{k} + \frac{\text{sen}\,(kx)}{k^2}\Bigg|_0^{\pi}\right] = \frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi}{k}\right) = -\frac{2}{k}$$

Logo a série de senos de f é dada por:

$$\boxed{S(x) = -2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\text{sen}\,(kx)}{k}}$$

b) O gráfico da soma da série de senos é dado por:
Pelo teorema da convergência, no intervalo de $[-\pi, \pi]$, $S(x)$ vale $\tilde{f}(x)$ nos pontos onde $\tilde{f}$ é contínua e vale a média dos limites laterais nos pontos de continuidade.

Assim de $[-\pi, \pi]$, podemos escrever $S(x)$ como:

$$S(x) = \begin{cases} x - \pi & , \quad \text{se} \quad 0 < x \leq \pi \\ x + \pi & , \quad \text{se} \quad -\pi \leq x < 0 \\ 0 & , \quad \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

e nos demais intervalos do tipo $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$ consideramos a extensão periódica de S definida em $[-\pi, \pi]$.

Ou, expandindo S(x), para todo eixo real, então:

$$S(x) = \begin{cases} (x - 2k\pi) - \pi & , \quad \text{se} \quad 2k\pi < x \leq \pi + 2k\pi \\ (x - 2k\pi) + \pi & , \quad \text{se} \quad -\pi + 2k\pi \leq x < 2k\pi \\ 0 & , \quad \text{se} \quad x = 2k\pi \end{cases} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}.$$

c) Pela identidade de Parseval:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,dx$$

Assim, no caso do exercício:

$$
\begin{aligned}
4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\tilde{f}(x)\right]^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(x)\right]^2 dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)^2 dx \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\left.\frac{(x-\pi)^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}
$$