Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
2a. Prova - 2o. Semestre 2007 - 22/10/2007

Turma B

Questão 1:

(a) (1,5 ponto) Encontre a série de Taylor para $f(x) = \ln(1 + x^4)$, em $x_0 = 0$, e determine todos os valores de x para os quais a série é convergente.

(b) (1,5 ponto) Calcule $\int_0^1 \ln(1 + x^4)dx$ com erro $< \frac{1}{80}$.

Solução:

(a)

$$\ln(1+t) = \int_0^t \frac{1}{1+u}du = \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty}(-u)^n du = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^t u^n du = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n+1}}{n+1}, \ \textit{se} \ -1 < t \leq 1$$

Fazendo $t = x^4$, vem que

$$\ln(1 + x^4) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+4}}{n+1}, \ \textit{para} \ -1 \leq x \leq 1$$

pois, neste caso, a série é convergente nos dois extremos, $x = \pm 1$.

(b)

$$\int_0^1 \ln(1 + x^4)dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(4n+5)(n+1)}$$

converge por Leibniz e basta considerar

$$\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{1}{(4n+5)(n+1)}$$

para se obter um erro menor que $a_{N+1} = \dfrac{1}{(N+2)(4N+9)}$. Logo, queremos N tal que $(N+2)(4N+9) > 80$, o que ocorre para $N \geq 3$, uma vez que $(3+2)(4.3+9) = 5.21 > 80$. Portanto,

$$\sum_{n=0}^{3}(-1)^n \frac{1}{(4n+5)(n+1)} = \frac{1}{5} - \frac{1}{9.2} + \frac{1}{13.3} - \frac{1}{17.4} \approx \int_0^1 \ln(1 + x^4)dx, \text{com erro menor que } \frac{1}{80}.$$

Questão 2:

(a) (1,5 ponto) Determine a soma da série $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$.

(b) (1,5 ponto) USANDO SÉRIES, determine $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \geq 0$, tal que o seguinte limite exista

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{3x^\alpha} \neq 0, \pm\infty.$$

Solução:

(a)

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Se } x \neq 0,\ \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Logo,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

(b)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Então}, e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}, x \in \mathbb{R}$$

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots \Leftrightarrow e^{x^2} - x^2 - 1 = \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots$$

Então,

$\frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{3x^\alpha} = \frac{1}{3x^\alpha}\left(\frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots\right)$ e o $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{3x^\alpha}$ existe e é um número real não nulo, se, e somente se, $\alpha = 4$ e, neste caso, o limite é igual a $\frac{1}{2!.3} = \frac{1}{6}$.

Questão 3:

(a) (2,0 pontos) Encontre a série de Fourier de senos da função

$$f(x) = 2 - \frac{2x}{\pi} \text{ para } 0 \in]0, \pi].$$

(b) (1,0 ponto) Determine a expressão da função $g(x)$ definida em $[91\pi, 92\pi]$, para o qual a série obtida em (a) converge.

(c) Sabendo que

$$s(x) = 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos{(2n+1)x}}{(2n+1)^2}$$

é a série de cossenos de $f(x) = x + 1,\ x \in [0, \pi]$, calcule o valor de

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Solução:

(a)

$$\begin{aligned}
(n \geq 1) \quad b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{ sen } (kx) dx = \frac{2}{\pi} \left(2 - \frac{2x}{\pi} \right) \text{ sen } (nx) dx = \\
&= \frac{4}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi} \text{ sen } (nx) dx - \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \text{ sen } (nx) dx \right\} = \\
&= \frac{4}{\pi} \left\{ -\frac{\cos{(nx)}}{n} \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{\pi} \left[-x \frac{\cos{(nx)}}{n} \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos{(nx)}}{n} dx \right] \right\} = \\
&= \frac{4}{\pi} \left\{ -\frac{(-1)^n + 1}{n} - \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\pi(-1)^n}{n} + \frac{\text{sen } (nx)}{n^2} \Big|_0^{\pi} \right] \right\} \\
&= \frac{4}{\pi} \left\{ -\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right\} = \frac{4}{\pi n}
\end{aligned}$$

Assim, a série de Fourier de senos de $f(x)$ é:

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\text{sen } (nx)}{x}, \ n = 1, 2, \ldots$$

e, sendo

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 2 - \frac{2x}{\pi} & 0 < x \leq \pi \\ 0 & x = 0 \\ -2 - \frac{2x}{\pi} & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

temos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{\text{sen } (nx)}{x} = \overline{f}(x), \ x \in [-\pi, \pi] \ e \ \overline{f} \text{ é } C^1 \text{ por partes em } [-\pi, \pi]$$

(b)

$$g(x) = \begin{cases} -2 - \frac{2}{\pi}(x - 92\pi) & 91\pi < x < 92\pi \\ 0 & x = 91\pi \ ou \ x = 92\pi \end{cases}$$

(c) Seja $\overline{f}(x)$ o prolongamento par em $[-\pi, \pi]$ de $f(x) = x + 1$. Por Parseval, tem-se que:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

$$\frac{a_0}{2} = 1 + \frac{\pi}{2} \ \Rightarrow \ a_0 = 2 + \pi \ e \ a_{2n+1} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

Logo,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(x+1)^2 dx = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^3}{3} + \pi^2 + \pi\right) = \frac{(2+\pi)^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} = \left[\frac{2\pi^2}{3} + 2\pi + 2 - 2 - \pi - \frac{\pi^2}{2}\right]\frac{\pi^2}{16} = \frac{\pi^4}{24} - \frac{\pi^4}{32} = \frac{\pi^4}{96}$$