excellentia

P1 MAT 2456

USP

CÁLCULO IV

PROF. PIO

24.AGO.2014

NOME: ______________________

RESUMO

Definição: A seqüência $\{a_n\}$ tem limite L e escreve-se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{ou} \quad a_n \to L \text{ se } x \to \infty$$

se para cada $\epsilon > 0$ existe um inteiro correspondente N tal que

$$|a_n - L| < \epsilon \quad \text{para} \quad n > N.$$

Se o limite $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe, dizemos que a seqüência é convergente. Do contrário, é dita convergente.

Teorema: Se $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ e $f(n) = a_n$ para $n \in \mathbb{N}$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = L$

Limites: Se $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ são seqüências convergentes e c é uma constante, então:

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} \quad \left(\text{se } \lim_{n\to\infty} b_n \neq 0\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} c = c$$

Teorema: Se $a_n \leq b_n \leq c_n$ para $n \geq n_0$ e $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, então $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

Teorema: Se $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$, então $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Definição: A seqüência $\{a_n\}$ é superiormente limitada se existe um valor M tal que $a_n \leq M$ para todo $n \geq 1$. É denominada inferiormente limitada se existe um valor m tal que $m \leq a_n$ para todo $n \geq 1$. Se é limitada inferior e superiormente, $\{a_n\}$ é dita apenas seqüência limitada.

Teorema: Toda seqüência limitada e monotônica é convergente.

- Teste da comparação

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos.

i) Se $\sum b_n$ é convergente e $a_n \leq b_n$ para qualquer n, então $\sum a_n$ também é convergente.

ii) Se $\sum b_n$ é divergente e $a_n \geq b_n$ para qualquer n, então $\sum a_n$ também é divergente.

- Teste da comparação do limite

Sejam $\sum a_n$ e $\sum b_n$ séries de termos positivos. Se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$$

sendo c uma constante real positiva, então ambas as séries convergem ou ambas as séries divergem.

- Teste da razão

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série de termos não nulos, e suponha que o limite $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$.

$L < 1$: a série é absolutamente convergente.
$L > 1$ ou $L = \infty$ ou $L = 1^+$: a série é divergente.
$L = 1^-$: o teste é inconclusivo.

- Teste da raiz

Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica e a constante k definida pelo limite:

$k = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Então:

$k < 1$: a série é absolutamente convergente.
$k > 1$ ou $k = 1^+$: a série é divergente.
$k = 1^-$: o teste é inconclusivo.

- Teste da integral

Se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Se $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ diverge, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

- Teste da série alternada (critério de Leibniz)

Se em uma série alternada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot b_n$, $b_n \geq 0$:

$$(i) \quad b_{n+1} \leq b_n$$
$$(ii) \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

então a série é convergente.