MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV
Escola Politécnica - $1^{\underline{a}}$ Prova - 27/08/2012

Turma B

Nome : ______________________________

No. USP : ______________________________

Professor(a) : ______________________________ Turma : ________

Q	N
1	
2	
3	
Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES

Questão 1.

(a) (2,0 pontos) Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a sequência dada por

$$a_{n+1} = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n}, \quad a_1 = 3.$$

(a.1) Sabendo que, para todo $n \geq 1$, $a_n > \sqrt{3}$, mostre que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

(a.2) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(b) (1,5 pontos) Mostre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\infty$.

(a)

(1,5) (a.1) É suficiente mostrar que $\{a_n\}$ é decrescente; ou seja, $a_{n+1} < a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(1+a_n)}{3+a_n} - a_n = \frac{3-a_n^2}{3+a_n} < 0, \text{ pois } a_n^2 > 3.$$

Logo, pelo Teorema da Sequência Monotônica, a sequência $\{a_n\}$ é convergente.

(0,5) (a.2) Pelo item (a.1), seja $L = \lim a_n$. Da relação de recorrência temos

$$L = \frac{3(1+L)}{3+L} \Rightarrow L^2 = 3 \Rightarrow L = \pm\sqrt{3}.$$

Como a sequência é de termos positivos, temos $L = \sqrt{3}$.

(b) Primeira solução: Seja $S_K = \sum\limits_{n=1}^{K} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum\limits_{n=1}^{K} \ln(n) - \ln(n+1)$

$$= \ln(1) - \ln(K+1) = -\ln(K+1).$$

Logo $\lim\limits_{K\to\infty} S_K = -\infty$.

~~Segunda solução (via comparação):~~

Observação: A seguinte estimativa não soluciona o exercício: para todo $n \geq 1$ temos $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n} \Rightarrow -\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) > -\frac{1}{n}$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) > -\frac{1}{n}$, o que NÃO prova sequer que a série diverge.

Questão 2.

(a) (1,5 pontos) Decida, justificando, se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2(n))}$ converge ou diverge.

(b) (2,0 pontos) Seja $q > 0$ um número real fixado. Determine todos os valores de $p > q$ para os quais a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p - n^q}$ é convergente.

(a) Vamos utilizar o critério da integral.

(i) Seja $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

Claramente $f(x) > 0$ e $f'(x) < 0$, para $x > 1$.

(ii) $$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx \underset{p(x)=\ln x}{=} \lim_{t\to+\infty} \int_0^{\ln t} \frac{1}{1+p^2}\,dp = \lim_{t\to+\infty} \operatorname{atan}(\ln t) = \pi/2$$

(iii) Logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln^2 n)}$ converge.

(b) Vamos utilizar comparação (no limite) com a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$:

(i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^p-n^q}}{\frac{1}{n^p}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-n^{q-p}} = 1, \text{ pois } p>q.$$

(ii) Como, para $p>1$, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge, temos que

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p-n^q}$ também convergirá para p satisfazendo $p>q$ e $p>1$.

Obs.: Note que, ~~pelo~~ mesmo critério, se $p>q$ e $p\leq 1$, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p-n^q}$ diverge.

Questão 3. (3,0 pontos) Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x+3)^n}{n\ln(n)},$$

estudando a convergência dos extremos neste intervalo.

Vamos aplicar o teste da razão:

(1,0) (i) Para $a_n = \dfrac{(-1)^n . (2x+3)^n}{n . \ln n}$ temos $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{|2x+3| . n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)}$

Logo $\lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |2x+3| < 1 \iff -2 < x < -1$

O intervalo aberto de convergência desta série é $]-2,-1[$.

(1,0) (ii) Análise da convergência no extremo $x=-2$:

A série fica: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.\ln n}$.

Aplicando agora o critério da integral com $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$, $x \geq 2$,

concluímos que a série diverge pois $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx = \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty$.

(1,0) (iii) Análise da convergência no extremo $x=-1$:

A série fica $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n . \frac{1}{n.\ln n}$.

Como a função $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ é decrescente, positiva e $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$,

segue-se do critério de Leibniz que a série converge.

MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV
Escola Politécnica - $1^{\underline{a}}$ Prova - 27/08/2012

Turma B

Nome : ______________________________

No. USP : ______________________________

Professor(a) : ______________________ Turma : ______

Q	N
1	
2	
3	
Total	

JUSTIFIQUE TODAS AS SUAS AFIRMAÇÕES

Questão 1.

(a) (2,0 pontos) Seja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a sequência dada por

$$a_{n+1} = \frac{2(1+a_n)}{2+a_n}, \quad a_1 = 2.$$

(a.1) Sabendo que, para todo $n \geq 1$, $a_n > \sqrt{2}$, mostre que $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge.

(a.2) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(b) (1,5 pontos) Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = +\infty$.

(a)

(1,5) (a.1) É suficiente mostrar que $\{a_n\}$ é decrescente, ou seja, $a_{n+1} < a_n$:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2(1+a_n)}{2+a_n} - a_n = \frac{2-a_n^2}{2+a_n} < 0, \text{ pois } a_n^2 > 2.$$

Logo, pelo Teorema da Sequência Monotônica, a sequência $\{a_n\}$ é convergente.

(0,5) (a.2) Pelo item (a.1) seja $L = \lim a_n$. Da relação de recorrência temos

$$L = \frac{2(1+L)}{2+L} \Rightarrow L^2 = 2 \Rightarrow L = \pm\sqrt{2}.$$

Como a sequência é de termos positivos, temos $L = \sqrt{2}$.

(b) Seja $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{k} \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(k+1) - \ln(1)$

$= \ln(k+1)$

Logo $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = +\infty$.

Observação: A seguinte estimativa não soluciona o exercício: para todo $n \geq 1$ temos $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \Rightarrow \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}$, o que não prova sequer que a série diverge.

Questão 2.

(a) (1,5 pontos) Decida, justificando, se $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln(n))}$ converge ou diverge.

(b) (2,0 pontos) Seja $q > 0$ um número real fixado. Determine todos os valores de $p > q$ para os quais a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p} - n^q}$ é convergente.

(a) Vamos utilizar o critério da integral:

(i) Seja $f : [2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x(1+\ln x)}$.

Claramente $f(x) > 0$ e $f'(x) < 0$, para $x > 2$

(ii) $$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_2^t \frac{1}{x(1+\ln x)}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_{\ln(2)}^{\ln t} \frac{1}{p}\,dp = \lim_{t\to+\infty} \ln(\ln t) - \ln 2$$
$$= +\infty.$$

(iii) Logo $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln n)}$ diverge e portanto $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+\ln n)}$ diverge.

(b) Vamos utilizar comparacão no limite com a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$:

(i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^{2p}-n^q}}{\frac{1}{n^{2p}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1-n^{q-2p}} = 1 \quad \text{pois } 2p > p > q.$$

(ii) Como para $2p > 1$ (ou seja $p > 1/2$) a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ converge, temos que $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}-n^q}$ também convergirá para $p > q$ e $p > 1/2$.

Obs.: Note que, pelo mesmo critério, se $p > q$ e $p \leq 1/2$, a série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{2p}-n^q}$ diverge.

Questão 3. (3,0 pontos) Determine o intervalo de convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(3x+5)^n}{n\ln(n)},$$

estudando a convergência dos extremos neste intervalo.

Vamos aplicar o teste da razão:

(1,0) (i) Para $a_n = \dfrac{(-1)^n(3x+5)^n}{n \ln n}$ temos $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \dfrac{|3x+5| \cdot n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Logo $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |3x+5| < 1 \iff -2 < x < -4/3$

O intervalo aberto de convergência da série é $]-2, -4/3[$

(1,0) (ii) Análise da convergência no extremo $x = -2$:

A série fica: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln n}$.

Aplicando agora o critério da integral com $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$, $x \geq 2$,

concluímos que a série diverge, pois $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x}\,dx = \ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty$.

(1,0) (iii) Análise da convergência no extremo $x = -1$:

A série fica: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{n \ln n}$.

Como a função $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$ é decrescente, positiva e $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$,

segue-se do critério de Leibniz que a série converge.