Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2008 - 15/09/2008

Turma B

Questão 1: Decida se cada uma das sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ abaixo converge ou não, e, em caso afirmativo, calcule o limite.

(a) $a_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$

(b) $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{(-1)^n+1}{2n}}$

(c) $a_n = \left(\dfrac{2n+a}{2n+1}\right)^n$, $a \in \mathbb{R}$

Solução:

(a) Reescrevendo o termo geral de outra forma, temos:

$$a_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2} = e^{n^2\cdot\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)} = e^{\frac{\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2}}$$

Calculando o limite do expoente, teremos $\left(\dfrac{1}{n} = x\right)$:

$$f(x) = \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\cdot\left(\frac{-\sin x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{2}$$

Sendo assim, chegamos que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{-\frac{1}{2}}$$

(b) Dividindo a sequência em duas sub-sequências, uma para n pares ($n \Rightarrow 2n$) e outra para n ímpares ($n \Rightarrow 2n+1$) podemos calcular o limite das duas:

$$a_{2n} = \sqrt[2n]{\frac{2}{2n}} = \sqrt[2n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[2n]{n}}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = 1$$

$$a_{2n+1} = \sqrt[2n+1]{0} = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = 0$$

Como os limites não deram iguais, a sequência (a_n) DIVERGE.

(c) Reescrevendo o n-ésimo termo, teremos:

$$a_n = \left(\frac{2n+a}{2n+1}\right)^n = e^{n\cdot\ln\left(\frac{2n+a}{2n+1}\right)} = e^{\frac{\ln\left(\frac{2+a/n}{2+1/n}\right)}{1/n}}$$

Calculando o limite do expoente com a substituição $\left(\frac{1}{n} = x\right)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{2+ax}{2+x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2+x}{2+ax}\right) \cdot \frac{a(2+x)-(2+ax)}{(2+x)^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{2a+ax-2-ax}{(2+ax)(2+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2a-2}{(2+ax)(2+x)} = \frac{a-1}{2}$$

Sendo assim: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{a-1}{2}}$.

Questão 2: Decida se cada série abaixo é absolutamente convergente ou condicionalmente convergente.

(a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n}}\right)$

Solução:

(a) Comparando no limite as séries $\left(\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}\right| = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}\right)$ e $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ (que converge, por se tratar de uma série harmônica de grau p, com $p > 1$), teremos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n)}{n^2}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2n^{\frac{1}{2}}}{1}\right) = 0$$

Sendo assim, como a série harmônica de grau $\frac{3}{2}$ converge, a série analisada também converge, e a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln(n)}{n^2}$ converge absolutamente.

(b) Analisando primeiramente a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}}$, vemos que ela converge, pois podemos compará-la com a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}$, que converge (trantando-se de uma série harmônica de grau p, com $p > 1$):

$$\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}}}\right) \leq \left(\frac{1}{n^{\frac{5}{3}}}\right)$$

Agora, comparando no limite a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n}}$, que vimos que converge, com a série em questão no exercício, $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n}}\right)$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan\left(\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n}}\right)}{\dfrac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n}}} = \lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

Sendo assim, as duas séries comparadas têm o mesmo comportamento, e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan\left(\frac{1}{n\sqrt[3]{n^2+3n}}\right)$ converge absolutamente.

Questão 3: (3,0) Determine todos os valores de x para os quais cada série abaixo converge.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n(n+\sqrt{n})^3}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln(n)} x^n$

Solução:

(a) Utilizando o Critério da Raiz, teremos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(x+1)^n}{2^n(n+\sqrt{n})^3}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+1|}{2} < 1$$

A série converge absolutamente para $|x+1| < 2 \Leftrightarrow -3 < x < 1$

Para $x = 1$ temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+\sqrt{n})^3}$, que podemos comparar com a série convergente $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
Como $\dfrac{1}{(n+\sqrt{n})^3} \leq \dfrac{1}{n^2}$, podemos afirmar que a série converge para $x = 1$.

Para $x = -3$ temos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+\sqrt{n})^3}$, que converge absolutamente pelo mesmo motivo da série anterior.

(b) Utilizando o Critério da Raiz, teremos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{\ln(n)} \cdot x^n\right|} = |x| < 1$$

Desta forma, a série converge para $-1 < x < 1$.

Para $x = 1$ e $x = -1$ tem-se o termo geral $a_n = \dfrac{n}{\ln(n)}$.

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \infty$$

Sendo assim, para $x = 1$ e $x = -1$ a série diverge $\left(\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0\right)$.