Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV para Engenharia
1a. Prova - 2o. Semestre 2005 - 12/09/2005

Turma A

Questão 1.

(a) (2,5 pontos) Determine todos os valores reais de de x para os quais

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n . 2^n . \operatorname{sen}^{2n} x}{n}$$

converge.

(b) (2,5 pontos) Decida para que valores reais de x a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n (x+3)^n}{\sqrt{n}}$$

converge. (Especifique o tipo de convergência e dê o raio de convergência).

Solução:

(a)

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} | \operatorname{sen}^2 x| = 2 \operatorname{sen}^2 x$$

Pelo Critério da Razão, a série converge para todos os x tais que $2 \operatorname{sen}^2 x < 1 \iff |\operatorname{sen} x| < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Ou seja, para x tais que $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} < \operatorname{sen} x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, i.e. para $x \in \left]k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right[, k \in \mathbb{Z}$.

Nos Extremos:

i) $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \dfrac{2^n}{n} . \dfrac{2^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, que converge pelo Critério de Leibniz.

ii) $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n . \dfrac{2^n . (-1)^{2n}}{n} . \dfrac{2^n}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$, que converge pelo Critério de Leibniz.

Portando, a série converge para

$$x \in \left[k\pi - \frac{\pi}{4}, k\pi + \frac{\pi}{4}\right], k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Seja $a_n = \dfrac{(-2)^n}{\sqrt{n}}$ para $n \geq 1$. Sabemos que o raio de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+3)^n$ será dado por $R = \lim_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, caso o limite exista (finito ou infinito). Assim,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$$

Disto segue que para $|x+3| < \frac{1}{2}$ a série converge absolutamente e para $|x+3| > \frac{1}{2}$ diverge. Ou seja, converge absolutamente para $-\frac{1}{2} < x+3 < \frac{1}{2}$, i.e. para $-\frac{7}{2} < x < -\frac{5}{2}$, e diverge para $x < -\frac{7}{2}$ ou $x > -\frac{5}{2}$.

Para $x = -\frac{7}{2}$, $x+3 = -\frac{1}{2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n(x+3)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n(-\frac{1}{2})^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ que diverge, pois é uma séria harmônica do tipo $\sum \frac{1}{n^p}$ com $p \leq 1$.

Para $x = -\frac{5}{2}$, $x+3 = \frac{1}{2}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n(x+3)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n(\frac{1}{2})^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Esta é uma série alternada, do tipo $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$, com $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} > 0$, decrescente e tal que $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Logo, pelo Critério de Leibniz, essa série converge. Agora, como $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ é divergente, então para $x = -\frac{5}{2}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-2)^n(x+3)^n}{\sqrt{n}}$ é condionalmente convergente.

RESPOSTA:
Raio de convergência: $R = \frac{1}{2}$
Intervalo de convergência: $]-\frac{7}{2}, -\frac{5}{2}]$
Tipo de convergência: para $-\frac{7}{2} < x < -\frac{5}{2}$ converge absolutamente; e para $x = -\frac{5}{2}$ converge condicionalmente.

Questão 2.

(a) (1,5 ponto) Sendo $p > 0$ constante, discuta, em função de p, a convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.(\ln n)^p}.$$

(b) (1,5 ponto) Decida se as séries abaixo convergem (absolutamente ou condicionalmente) ou divergem:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} k.\ \text{sen}\, \frac{1}{k}$

(ii) $\sum_{k=0}^{\infty} k.e^{-k}$

(iii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$

Solução:

(a) Seja $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^p}$ para $x \in [2, +\infty[$. Temos $f(x) > 0$, f é decrescente (pois $f'(x) = \frac{-[(\ln x)^p + p.(\ln x)^{p-1}]}{(x(\ln x)^p)^2} < 0$ se $x \geq 2$), $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ e $a_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^p} = f(n), \forall n \geq 2$. Assim, pelo Critério de Integral, a série $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ converge se, e somente se, a integral imprópria $\int_2^{+\infty} f(x)dx$ convergir.

Fazendo a mudança $u = \ln x$ (e $\therefore du = \frac{1}{x}dx$),

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int \frac{du}{u^p} = \begin{cases} \ln u = \ln(\ln x) & \text{se } p = 1 \\ \frac{u^{-p+1}}{-p+1} = \frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1} & \text{se } p \neq 1 \end{cases}$$

Para $p = 1$:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b\to+\infty} [\ln(\ln x)]_2^b = \lim_{b\to+\infty} \ln(\ln b) - \ln(\ln 2) = +\infty \quad (\textit{diverge})$$

Para $p \neq 1$,

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \lim_{b\to+\infty} \left[\frac{(\ln x)^{-p+1}}{-p+1}\right]_2^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} \frac{(\ln b)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{-p+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } p < 1 \ (\textit{diverge}) \\ \frac{(\ln 2)^{-p+1}}{p-1} & \text{se } p > 1 \ (\textit{converge}) \end{cases}$$

Logo,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n.(\ln n)^p} \begin{cases} \textit{diverge} & \text{se } p \leq 1 \\ \textit{converge} & \text{se } p > 1 \end{cases}$$

(b) (i)

$$\lim_{k\to\infty} k \ \text{sen}\, \frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\text{sen}\, \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 1 \neq 0$$

Logo, pelo Critério da Divergência, a série diverge.

(ii) $a_k = k.e^{-k} > 0$ para $k \geq 1$, $\therefore \sum_{k=0}^{\infty} k.e^{-k}$ é série de termos positivos. Pelo Critério da Razão,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1).e^{-k-1}}{k.e^{-k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k}.e^{-1} = \lim_{k\to\infty} \left(1+\frac{1}{k}\right)e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Logo, a série converge absolutamente.

(iii)

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = (-1)^n b_n,\ com\ b_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

A seqüência (b_n) é positiva, decrescente e $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = 0$. Logo, pelo Critério de Leibniz para séries alternadas, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_n$ converge.

Por outro lado, comparando-se no limite a série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ com a série $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, tem-se

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1.$$

E, como a série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ é uma harmônica com $p = \frac{1}{2} < 1$, ela diverge. Logo, pelo Critério da Comparação no Limite, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Assim, $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ converge condicionalmente.

Questão 3. (2,0 pontos) Verifique se a seqüência definida por $x_1 = \cos 1, x_{n+1} = \max\{x_n, \cos(n+1)\}, n \geq 1$ é convergente ou não.

Solução:

$x_{n+1} = \max\{x_n, \cos(n+1)\} \geq x_n$. Logo, a seqüência (x_n) é crescente, i.e. $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \leq x_{n+1} \leq ...$ (alguns livros chamam isso de seqüência não-decrescente). Além disso, vamos provar por indução finita que $x_n \leq 1, \forall n \geq 1$.

- Para $n = 1$, $x_1 = \cos 1 \leq 1$. Portando, a afirmação é válida para $n = 1$.
- Suponha a afirmação válida para n (i.e. $x_n \leq 1$). Então, $x_{n+1} = \max\{x_n, \cos(n+1)\} \leq max\{1, 1\} = 1$ e a afirmação é válida para $n + 1$.

Logo, pelo Princípio da Indução Finita, a afirmação $x_n \leq 1$ é válida para todo $n \geq 1$.

Como a seqüência (x_n) é crescente e limitada superiormente (por 1), segue (do Teorema sobre seqüências "monótonas limitadas") que ela é convergente.