

MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV

2º Semestre de 2017 - 2ª Lista de exercícios

1. Usando derivação e integração termo a termo, se necessário, determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de x para os quais essas expansões são válidas:

a) $\frac{1}{x^2 + 25}$ b) $\arctg(2x)$ c) $\frac{1}{(1+x)^2}$ d) $\frac{1}{(1+x)^3}$ e) $\frac{2x}{1+x^4}$
 f) $\ln(1+x)$ g) $\ln\left(\frac{1}{1+3x^2}\right)$ h) $\frac{x}{1+x-2x^2}$ i) $\int_0^x \frac{t}{1+t^5} dt$

2. Verifique que

a) $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| < 1$ b) $\arctg x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad |x| \leq 1.$

3. Obter uma expressão das somas das séries abaixo e os respectivos raios de convergência, usando derivação e integração termo a termo, se necessário.

a) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$ b) $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$
 c) $x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$ d) $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$
 e) $1 + 2x + 3x^2 + \dots + (n+1)x^n + \dots$ f) $x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n + \dots$
 g) $x + 2x^3 + 3x^5 + \dots + nx^{2n-1} + \dots$ h) $\frac{x^2}{1 \cdot 2} - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} - \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \dots$
 i) $1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + \dots$ j) $x + 2^3x^2 + 3^3x^3 + 4^3x^4 + \dots$
 k) $4 + 5x + 6x^2 + 7x^3 + \dots$ l) $\frac{x^4}{4} + \frac{x^8}{8} + \frac{x^{12}}{12} + \dots$

4. Utilizando as somas das séries obtidas no exercício anterior, calcule:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$ c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^n(n-1)n}$.

5. Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} x^n = \frac{1}{(1-x)^4}$.

6. Utilizando o desenvolvimento em série, obtenha um valor aproximado de

(a) e , com erro inferior a 10^{-5} (b) $\text{sen } 1$, com erro inferior a 10^{-5} e a 10^{-7}
 (c) $\ln 2$ e $\ln 3$, com erro inferior a 10^{-5} (d) $\arctg(1/2)$ e $\arctg(1/3)$, com erro inferior a 10^{-5}
 (e) $\pi/4$, com erro inferior a 10^{-5}

7. Utilizando série de Taylor calcule $\frac{d^{320} \arctg}{dx^{320}}(0)$ e $\frac{d^{321} \arctg}{dx^{321}}(0)$.

8. Dê a série de Taylor de $f(x)$ centrada no 0, indicando os intervalos de convergência

a) $f(x) = x^2 e^x$ b) $f(x) = \ln(1-x^3)$ c) $f(x) = \text{sen}(x^2)$
 d) $f(x) = \cos^2 x$ e) $f(x) = x \cos(2x)$ f) $f(x) = x \arctg x$

9. Desenvolva em série de potências de x as seguintes funções, indicando os intervalos de convergência, e calcule $f(1)$ com erro inferior a 10^{-6} , sendo que as funções dos itens (a) e (c) são definidas em $t = 0$ como valendo 1:

a) $f(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt$ b) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt$ c) $f(x) = \int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt$ d) $f(x) = \int_0^x \operatorname{sen}(t^2) dt$

10. Utilizando a expansão em série de potências das funções envolvidas, calcule os seguintes limites

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$
 (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}\right)}{x^\alpha}$ (e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)}{x^\alpha}$

11. Ache a série de Fourier de $f(x)$, determine soma da série e faça os gráficos de f e da função soma da série encontrada:

a) $f(x) = \begin{cases} a, & -\pi < x \leq 0 \\ b, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi < x \leq 0 \\ bx, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$
 c) $f(x) = |x|, -\pi < x \leq \pi$ d) $f(x) = e^{ax}, -\pi < x \leq \pi, a \neq 0$
 e) $f(x) = \operatorname{sen}(ax), -\pi < x \leq \pi, a \notin \mathbb{Z}$ f) $f(x) = ax + b, -\pi < x \leq \pi$
 g) $f(x) = |\cos x|, -\pi < x \leq \pi$

12. Ache a série de Fourier de senos de f , a série de cossenos de f , determine a soma de cada uma delas e faça os gráficos de f e da soma de cada uma das séries encontradas:

a) $f(x) = ax, 0 \leq x \leq \pi$ b) $f(x) = x^2, 0 \leq x \leq \pi$
 c) $f(x) = ax + b, 0 \leq x \leq \pi$ d) $f(x) = \operatorname{sen} x, 0 \leq x \leq \pi$
 e) $f(x) = |\cos x|, 0 \leq x \leq \pi$

13. Mostre que

a) $1 = \frac{4}{\pi}(\operatorname{sen} x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5} \operatorname{sen} 5x + \dots), 0 < x < \pi;$
 b) $\pi - x = 2(\operatorname{sen} x + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3x + \dots), 0 < x < \pi;$
 c) $x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4(-\cos x + \frac{\cos 2x}{2^2} - \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots), -\pi < x < \pi$
 d) $x(\pi - x) = \frac{\pi^2}{6} - (\cos 2x + \frac{\cos 4x}{2^2} + \frac{\cos 6x}{3^2} + \dots), 0 < x < \pi$
 e) $x(\pi - x) = \frac{8}{\pi}(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen} 3x}{3^3} + \frac{\operatorname{sen} 5x}{5^3} + \dots), 0 < x < \pi$

14. Verifique as seguintes igualdades, usando o exercício anterior

a) $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2n+1} + \dots$ b) $\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$
 c) $\frac{\pi^3}{32} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ d) $\frac{3\pi^3}{128} \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \dots$
 e) $\frac{3\pi}{4} = \sqrt{2} + 1 + \frac{1}{3} \sqrt{2} - \frac{1}{5} \sqrt{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} \sqrt{2} + \frac{1}{9} \sqrt{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{11} \sqrt{2} - \frac{1}{13} \sqrt{2} - \dots$

15. Calcule a soma das séries

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$

16. Determine c_1, c_2, c_3 de modo que as integrais abaixo assumam o menor valor possível:

a) $\int_{-\pi}^{\pi} [x - c_1 \operatorname{sen} x - c_2 \operatorname{sen} 2x - c_3 \operatorname{sen} 3x]^2 dx$ b) $\int_{-\pi}^{\pi} [x^2 - c_1]^2 dx$
 c) $\int_{-\pi}^{\pi} [|\cos x| - c_1 - c_2 \operatorname{sen} x - c_3 \cos x]^2 dx$

17. Ache a série de Fourier da função $f(x)$ periódica de período 1 e que satisfaz $f(x) = x^2$ se $0 \leq x < 1$. Qual a soma de série quando $x = 999/2$? E quando $x = 999$?
18. a) Obtenha a série de Fourier da função ímpar $f(x)$, periódica de período 4, e que satisfaça $f(x) = x$ se $0 \leq x \leq 1$ e $f(x) = f(2 - x)$ se $1 \leq x < 2$.
- b) Encontre b_1, b_2, b_3, \dots tais que
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2-x, & 1 < x < 2 \end{cases} .$$
- c) Encontre c_1, c_2, c_3, \dots tais que
$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} \left(\frac{(2n-1)\pi x}{2} \right) = \begin{cases} 1-x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1+x, & 1 < x < 2 \end{cases} .$$
- d) Quanto vale a soma de série do item c) quando $x = 200$? E quando $x = 201$?
19. Obtenha constantes a e b tais que a série de senos de $f(x) = x^3 + ax$ em $[0, \pi]$ seja da forma

$$b \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^3}$$

20. Usando a fórmula de Parseval prove que

$$(a) \frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \qquad (b) \frac{\pi^6}{945} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6}$$

21. Calcule

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} \qquad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

22. (a) Dê fórmulas para as constantes $a_n, n \geq 0, b_n, n \geq 1$, tais que

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) = x^2 e^x, \quad -\pi < x < \pi$$

- (b) Determine a soma da série para $x = \frac{11\pi}{2}$ e para $x = 11\pi$.

23. Encontre constantes a_0, a_1, \dots, a_n que minimizem a expressão

$$\int_0^{\pi} \left[x - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx \right) \right]^2 dx.$$

Respostas

1. (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{5^{2n+2}}$, $-5 < x < 5$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1}$, $-1/2 \leq x \leq 1/2$
 (c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)x^n$, $-1 < x < 1$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2} x^n$, $-1 < x < 1$
 (e) $2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{4n+1} \right)$, $-1 < x < 1$ (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$, $-1 < x \leq 1$
 (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^{2n}$, $\frac{-1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-(-1)^n 2^n}{3} \right) x^n$, $\frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$
 (i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+2} x^{5n+2}$, $-1 < x \leq 1$

3. (a) $-\ln(1-x)$ (b) $\ln(1+x)$ (c) $\ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ (d) $\arctg x$ (e) $\frac{1}{(1-x)^2}$ (f) $\frac{x}{(1-x)^2}$
 (g) $\frac{x}{(1-x^2)^2}$ (h) $(1+x) \ln(1+x) - x$ (i) $\frac{1+x}{(1-x)^3}$ (j) $\frac{x+4x^2+x^3}{(1-x)^4}$ (k) $\frac{4-3x}{(1-x)^2}$ (l)
 $\frac{-1}{4} \ln(1-x^4)$.

4. $\ln 2$; 26 ; $\frac{6}{5} \ln \frac{6}{5} - \frac{1}{5}$.

6. 0 e $(320)!$.

7 .

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}$, $x \geq 0$
 (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$ (d) $1 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$, $x \in \mathbb{R}$
 (e) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n+1}}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+1)}$, $-1 \leq x \leq 1$

9 .

- (a) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$ (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$, $x \in \mathbb{R}$
 (c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n^2}$, $-1 < x \leq 1$ (d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!}$, $x \in \mathbb{R}$

10. (a) 1 (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{6}$ (d) $-\frac{1}{6!}$, se $\alpha = 6$; 0 , se $\alpha < 6$; $-\infty$, se $\alpha > 6$
 (e) $-\frac{1}{7!}$, se $\alpha = 7$; 0 , se $\alpha < 7$; $-\infty$, se $\alpha > 7$

11. (a) $\frac{a+b}{2} + \frac{2}{\pi}(b-a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}((2n-1)x)}{2n-1}$.

soma: a , se $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$; b , se $2k\pi < x < (2k+1)\pi$; $\frac{a+b}{2}$, se $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(b) $\frac{b-a}{4}\pi + \frac{2}{\pi}(a-b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2} - (a+b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{sen}(nx)}{n}$.

soma: ax , se $(2k-1)\pi < x \leq 2k\pi$; bx , se $2k\pi \leq x < (2k+1)\pi$; $\frac{b-a}{2}\pi$, se $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}$

soma: $|x|$, se $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\frac{\sinh(a\pi)}{a\pi} + \frac{2\sinh(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2} (a \cos(nx) - n \text{sen}(nx))$.

soma: e^{ax} , se $-\pi < x < \pi$; $\cosh(a\pi)$ se $x = \pm\pi$, e a sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$

$$(e) \frac{2\operatorname{sen}(a\pi)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n}{n^2 - a^2} \operatorname{sen}(nx)$$

soma: $\operatorname{sen}(ax)$, para $-\pi < x < \pi$; 0 para $x = \pm\pi$ e a sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

$$(f) b + 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}.$$

soma: $ax + b$, para $-\pi < x < \pi$; b , para $x = \pm\pi$, e sua extensão periódica, para $x \in \mathbb{R}$.

$$(g) \frac{2}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \right)$$

soma : $|\cos x|$, para $x \in \mathbb{R}$

$$12. (a) 2a \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n}$$

soma : ax , para $-\pi < x < \pi$; 0 para $x = \pm\pi$, e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{a}{2}\pi - \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2},$$

soma : $a|x|$, para $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

$$(b) 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n} - \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}((2n-1)x)}{(2n-1)^3}.$$

soma : x^2 para $0 \leq x < \pi$; $-x^2$, para $-\pi \leq x < 0$; 0 para $x = \pm\pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos(nx)}{n^2}.$$

soma : x^2 , para $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$

$$(c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (b - (a\pi + b)(-1)^n) \operatorname{sen}(nx).$$

soma : $ax - b$, para $-\pi < x \leq 0$; $ax + b$, para $0 < x < \pi$, 0, para $x = \pm\pi$, 0 e sua extensão periódica para $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{a\pi}{2} + b - \frac{4a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

soma : $a|x| + b$, para $-\pi \leq x \leq \pi$ e sua extensão periódica de $a|x| + b$ para $x \in \mathbb{R}$.

(d) $\operatorname{sen} x$,

soma : $\operatorname{sen} x$, para $x \in \mathbb{R}$;

$$\frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \right),$$

soma : $|\operatorname{sen} x|$ para $x \in \mathbb{R}$

$$(e) \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1 + (-1)^n}{\pi n(n-1)} \operatorname{sen}((2n-1)x),$$

soma : $-|\cos x|$ para $x \leq 0$ e $|\cos x|$ para $x \geq 0$, $x \neq k\pi$ e 0 para $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

$$\frac{2}{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} \right),$$

soma : $|\cos x|$, para $x \in \mathbb{R}$

(a) usar 11a) em $x = \pi/2$

(b) usar 11c) em $x = \pi$

14. (c) usar 11e) em $x = \pi/2$

(d) usar 11e) em $x_0 = \pi/4$

(e) usar 11b) em $x = \pi/4$

15. (a) $\frac{\pi^2}{8}$

b) $\frac{\pi^2}{12}$

16. (a) $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = \frac{2}{3}$ (b) $c_1 = \frac{\pi^2}{3}$
 (c) $c_1 = \frac{2}{\pi}, c_2 = 0, c_3 = 0$
17. $\frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi^2 n^2} \cos(2n\pi x) - \frac{1}{\pi n} \operatorname{sen}(2n\pi x) \right)$ $S(999) = 1/2$ e $S(999/2) = 1/4$.
18. (a) $\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \operatorname{sen}\left(\frac{(2k+1)\pi x}{2}\right)$. (b) $b_n = \frac{8}{\pi^2} \frac{(-1)^{(n-1)}}{(2n-1)^2}$ para $n \geq 1$.
 (c) $c_n = \frac{4}{(2n-1)\pi} + \frac{(-1)^n 8}{(2n-1)^2 \pi^2}$, para $n \geq 1$. (d) $S(200) = S(0) = 0; S(201) = S(1) = 0$
19. $a = -\pi^2, b = 12$
20. (a) Use $f(x) = x^2$ (b) Use exercício 19.
21. (a) $\frac{\pi^4}{96}$ (b) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}$.