## MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia IV
## 2o. Semestre de 2017 - 1a. Lista de exercícios

I) Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

a) Mostre que se $a, b \in \mathbb{R}$ e $0 \leq a < b$, então $\dfrac{b^{n+1}-a^{n+1}}{b-a} < (n+1)b^n$.

b) Deduza que $b^n[(n+1)a - nb] < a^{n+1}$, para todos $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 \leq a < b$.

c) Use $a = 1 + 1/(n+1)$ e $b = 1 + 1/n$ na parte b) para demonstrar que $(a_n)_n$ é crescente.

d) Use $a = 1$ e $b = 1 + 1/(2n)$ na parte b) para demonstrar que $a_{2n} < 4$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

e) Use as partes c) e d) para concluir que $a_n < 4$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Conclua, usando também c) que o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ existe.

II) (*Teorema do Confronto*) Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências convergentes para $a \in \mathbb{R}$. Seja $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ outra sequência para a qual existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leq c_n \leq b_n$, para todo $n \geq N$. Prove que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $a$.

III) Decida se cada uma das sequências abaixo é convergente ou divergente, calculando o limite no caso convergente.

1) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \ldots$
2) $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1, \frac{1}{8}, 1, \frac{1}{16}, \ldots$
3) $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{7}{8}, \ldots$
4) $a_n = \left(4+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$
5) $c_k = \frac{\sqrt{k}+1}{k-1}$, $k \geq 2$
6) $a_n = \frac{n^3+3n+1}{4n^3+2}$
7) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
8) $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
9) $a_n = \frac{2n}{n+1} - \frac{n+1}{2n}$
10) $a_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$
11) $a_n = \frac{\sin n}{n}$
12) $a_n = \sin n$; $b_n = \sin(n\pi)$; $c_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
13) $a_n = \frac{2n+\sin n}{5n+1}$
14) $a_n = \frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}$
15) $a_n = \sqrt[n]{n^2+n}$
16) $a_n = \frac{n\sin(n!)}{n^2+1}$
17) $a_n = \frac{3^n}{2^n+10^n}$
18) $a_n = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n$
19) $a_n = \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$
20) $a_n = na^n$, $a \in \mathbb{R}$
21) $a_n = \frac{n!}{n^n}$
22) $a_n = n - n^2\sin\frac{1}{n}$
23) $a_n = (-1)^n + \frac{(-1)^n}{n}$
24) $a_n = \sqrt[n]{a^n+b^n}$ onde $0 < a < b$
25) $a_n = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n}\right)$
26) $a_n = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$
27) $a_n = \frac{1}{n}\cdot\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}$
28) $a_n = \sqrt[n]{n}$
29) $a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
30) $a_n = \frac{\ln(n)}{n^a}$, $a > 0$
31) $a_n = \sqrt[n]{n!}$
32) $a_n = \sqrt[n]{a}$, $a > 0$
33) $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$
34) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$
35) $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$
36) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+11}\right)^n$
37) $a_n = \left(\frac{3n+5}{5n+1}\right)^n\left(\frac{5}{3}\right)^n$
38) $a_n = \left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n$

IV) Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequências numéricas. Decida se cada afirmacão abaixo é verdadeira ou falsa. Justifique sua resposta.

(1) Se $a_n \to a$ então $|a_n| \to |a|$.
(2) Se $|a_n| \to |a|$ então $a_n \to a$.
(3) Se $a_n \to a$ e $a_n \leq 0$ então $a \leq 0$.
(4) Se $a_n \to a$ e $a_n > 0$ então $a > 0$.
(5) Se $a_n \to a$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge então $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.
(6) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não convergem então $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.
(7) Se $a_n \cdot b_n \to d$ então $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergem.
(8) Se $a_n \cdot b_n \to 0$ então ou $a_n \to 0$ ou $b_n \to 0$

V) 1) Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $f : A \to A$ uma função contínua em $A$ e $a \in A$. Seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência definida por: $a_0 \in A$ e $a_{n+1} = f(a_n)$, para todo $n \geq 0$ e suponha que $(a_n)_n$ converge para $a$. Prove que $f(a) = a$.

2) Considere a sequência $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, .... Verifique que a sequência é crescente e limitada superiormente por 2 e calcule seu limite.

3) Seja a sequência definida por recorrência da seguinte forma: $x_1 = \sqrt{2}$ e $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, para $n \in \mathbb{N}$, com $n \geq 2$. Mostre que a sequência é limitada e crescente. Obtenha o seu limite.

4) (i) Diz-se que um ponto $B$ de um segmento $\overline{OA}$ divide este segmento na *razão áurea* se $\frac{OA}{OB} = \frac{OB}{BA}$. (Diz-se também que $B$ divide o segmento $OA$ em *média e extrema razão*) Denota-se por $\varphi$ a razão $\frac{OA}{OB}$. Mostre que $\varphi$ é a raiz positiva da equação $x^2 - x - 1 = 0$, chamado *número de ouro*.

(ii) (*Sequência de Fibonacci*). Considere a sequência dada por $f_0 = f_1 = 1$ e $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, para $n \geq 2$. Prove que a sequência $x_n = \frac{f_n}{f_{n+1}}$ converge e que seu limite é $\varphi$ .

5) Considere a sequência $(\frac{p_n}{q_n})_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $p_1 = q_1 = 1$ e, para $n \geq 2$, $p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1}$ e $q_n = p_{n-1} + q_{n-1}$. Prove que a sequência é convergente e que $\lim \frac{p_n}{q_n} = \sqrt{2}$.

VI) Verifique a convergência ou divergência das seguintes sequências.

1) $s_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r^3}$ 2) $s_n = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{e^r}$ 3) $s_n = \displaystyle\sum_{r=3}^{n} \frac{1}{\ln r}$

4) $a_n = \dfrac{2.4.6....(2n)}{1.3.5....(2n-1)}$ 5) $a_n = \dfrac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n)}$ 6) $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{2.4.6...(2n)}{1.3.5...(2n-1)}$.

VII) Expresse as seguintes representações decimais como quociente de 2 inteiros

1) $1,\overline{29}$ 2) $0,3\overline{117}$.

VIII) Seja $(a_n)$ uma sequência qualquer dos dígitos 0,1,2,...,9. Mostre que a série

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + ... + \frac{a_n}{10^n} + ...$$

é convergente.

IX) Seja $(a_n)$ uma sequência de números positivos tal que $\sum a_n$ diverge. Mostre que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ também diverge.

X) Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, calcule $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$.

XI) Decida se cada uma das séries abaixo é convergente. Se possível, calcule sua soma.

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n} + 2^n\right)$ 2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\, t^{\frac{k}{2}}$ para $0 < t < 1$ 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u^n(1 + u^n)$ para $|u| < 1$

4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ para $|x| < 1$ 5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} x$ para $|x| < \frac{\pi}{2}$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j}\right)$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ 9) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sin k}$

10) $\displaystyle\sum_{s=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{s}\right)$ 11) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + \cos\ k}{k}$

XII) É convergente ou divergente? Justifique.

1) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2-4}}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\text{arctg } n}{n^2}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$ 4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n!)^\lambda},\ \lambda > 0$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ 7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\ln n}}$ 8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+3}\ \sqrt[5]{n^3+5}}$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 10) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ 11) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 12) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p},\ p>0$

13) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^p}\right),\ p>0$ 14) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \sqrt{n}\ \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!3^n}{n^n}$ 16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!e^n}{n^n}$

17) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}}}{k^k}$ 18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ 19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$

XIII) Decidir se a série converge absolutamente, condicionalmente ou diverge.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\frac{3}{2}}}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2+1}{n^3+3}$ 4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln n}$

5) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$ 6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2}$ 7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$ 8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\frac{1}{n^p},\ p>0$ 10) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ 11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$

XIV) Verifique as relações 1) e 2) abaixo e use-as para calcular as somas 3) - 7):

1) $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1)-f(n)] = \lim_{n\to\infty} f(n) - f(1)$, se o limite existir.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} [f(n+1)-f(n-1)] = \lim_{n\to\infty} [f(n)+f(n+1)] - f(0) - f(1)$, se o limite existir.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(\frac{n}{n+2}\right)$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left[\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]$

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$ 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ \dots\ (n+k)},\ (k \geq 2)$

XV) Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais as séries convergem.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1+x^n)$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ 3) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$ 4) $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$ 6) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n\sin x}$ 7) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5} x^{2n}$

XVI) Determine o intervalo máximo de convergência de cada uma das séries de potências abaixo:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n!\ x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3+1}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(2n)!} x^n$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-5)^n}{n3^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{(2n)!}(x-7)^n$ h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{e^n}(x-e)^n$ i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}(x+3)^n$

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$ k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}(x-4)^{2n}$ l) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} x^n$

m) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x^{n^2}$ n) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n4^n} x^n$

XVII) Obtenha o raio de convergência para as séries seguintes.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \frac{n!}{n^n}$ e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{3n} \frac{n!}{n^n}$ f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!} \frac{n!}{n^n}$.

XVIII) Determine o intervalo de convergência de:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2+(-1)^n)^n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+2}{5n+7}\right)^n x^n$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n+3}{3^n+2}\right) x^n$ d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\ln n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{a^n+b^n}$, com $b > a > 0$.

XIX) Usando derivação e integração termo a termo, se necessário, determine as expansões em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ das seguintes funções e os valores de $x$ para os quais essas expansões são válidas:

a) $\dfrac{1}{x^2+25}$ b) $\operatorname{arctg}(2x)$ c) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ d) $\dfrac{1}{(1+x)^3}$ e) $\dfrac{2x}{1+x^4}$

f) $\ln(1+x)$ g) $\ln\left(\dfrac{1}{1+3x^2}\right)$ h) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$ i) $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t^5}dt$

XX) Verifique que

a) $\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = 2\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| < 1$ b) $\operatorname{arctg} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $|x| \leq 1$.

## RESPOSTAS

(III)

| | | |
|---|---|---|
| 1) converge para 1 | 2) diverge | 3) diverge |
| 4) converge para 2 | 5) converge para 0 | 6) converge para $\frac{1}{4}$ |
| 7) converge para 0 | 8) converge para 1 | 9) converge para $\frac{3}{2}$ |
| 10) converge para $\frac{1}{2}$ | 11) converge para 0 | 12) $a_n$ e $c_n$ divergem ; $b_n \to 0$ |
| 13) converge para $\frac{2}{5}$ | 14) converge para 0 | 15) converge para 1 |
| 16) converge para 0 | 17) converge para 0 | 18) converge para $e$ |
| 19) converge para 0 | 20) converge para 0 se $\lvert a\rvert < 1$ | 21) converge para 0 |
| 22) converge para 0 | 23) diverge | 24) converge para $b$ |
| 25) converge para 0 | 26) converge para $\frac{1}{2}$ | 27) converge para 0 |
| 28) converge para 1 | 29) converge para 0, $\alpha \in \mathbb{R}$ | 30) converge para 0 |
| 31) diverge | 32) converge para 1 | 33) $1/e$ |
| 34) diverge | 35) 1 | 36) 0 |
| 37) exp(22/15) | 38) 1 | |

(VI) 1) converge, 2) converge para $\frac{1}{e-1}$, 3) diverge, 4) diverge (Dica: calcular $\ln a_n$), 5) converge para 0 (Dica: calcular $\ln a_n$). 6) converge para 0.

(XI) 1) diverge, 2) $\frac{1}{1+\sqrt{t}}$, 3) $\frac{2+u}{1-u^2}$, 4) $\frac{1}{1+x^2}$, 5) $\frac{1}{1-\sin^2 x}$, 6) diverge, 7) diverge, 8) diverge, 9) diverge, 10) diverge, 11) diverge.

(XII) 1) diverge, 2) converge, 3) converge, 4) converge, 5) diverge, 6) diverge, 7) converge, 8) converge, 9) converge, 10) converge, 11) converge, 12) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$, 13) converge se $p > 1$ e diverge se $p \leq 1$, 14) diverge, 15) diverge, 16) diverge, 17) converge, 18) diverge, 19) diverge.

(XIII) 1) converge condicionalmente, 2) converge absolutamente, 3) converge condicionalmente, 4) converge condicionalmente, 5) converge condicionalmente, 6) converge absolutamente, 7) diverge, 8) diverge, 9) converge absolutamente se $p > 1$ e converge condicionalmente se $p \leq 1$, 10) converge absolutamente, 11) converge condicionamente.

(XIV) 3) 1; 4) $\ln 2$; 5) $\sin(1)$ 6) converge para 1; 7) converge para $\frac{1}{k!(k-1)}$

(XV) 1) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, 2) $\{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$, 3) $\{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$, 4) $\{x = 0\}$,

5) $\{x \in \mathbb{R} : 1/2 < |x| < 1\}$, 6) $\{x \in \mathbb{R} : 2k\pi < x < (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, 7) $\{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$.

(XVI) a) $]-4,4[$; b) $\{0\}$; c) $[-1,1]$; d) $\{0\}$; e) $]2,8]$; f) $[-2,0]$; g) $\mathbb{R}$; h) $]0,2e[$; i) $]-3-e,-3+e[$; j) $[2,4]$; k) $]2,6[$; l) $[-1,1]$; m) $]-1,1[$; n) $[-4/3,4/3[$.

(XVII) a) $R = 1/4$; b) $R = 1/2$; c) $R = 1$; d) $R = e$; e) $R = \sqrt[3]{e}$; f) $R = 1$.

(XVIII) a) $]-1,1[$; b) $]-5/3,5/3[$; c) $]-3/2,3/2[$; d) $[-1,1[$; e) $]-b-1,b-1[$.

(XIX)

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{5^{2n}},\ -5 < x < 5$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{2n+1} x^{2n+1},\ -1/2 \leq x \leq 1/2$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)x^n,\ -1 < x < 1$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)(n+1)}{2}\ x^n, -1 < x < 1$

(e) $2\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n+1}\right), -1 < x < 1$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}, -1 < x \leq 1$

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n}\ x^{2n},\ \frac{-1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1-(-1)^n 2^n}{3} \right) x^n,\ \frac{-1}{2} < x < \frac{1}{2}$

(i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5n+2}\ x^{5n+2},\ -1 < x \leq 1$