1ª Questão: Determinar se as séries abaixo são absolutamente convergentes, condicionalmente convergentes ou divergentes:

a) (1,5 pontos) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt{n}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

b) (1,0 ponto) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{e^{n^2}}{n!}$

c) (1,5 pontos) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{1+n\ln(n)}$

2ª Questão: Considere $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ x \text{ se } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

a) (1,0 ponto) Determine a série de cossenos de f.

b) (1,0 ponto) Seja $S(x)$ a soma da série de cossenos de f. Esboce seu gráfico em $[-3\pi, 3\pi]$.

c) (1,0 ponto) Sendo $S(x)$ definida no item anterior, qual o valor de $S(\frac{59\pi}{2})$?

3ª Questão:

a) (1,5 pontos) Determine a solução geral da equação:

$$3y'' - 6y' + 6y = x^2 + e^{2x}\cos(x).$$

b) (1,5 pontos) Determine a solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} e^{x^3} + \sin(y) + \frac{x}{3}\cos(y)y' = 0, \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$\frac{x}{3}\cos y\, dy + (e^{x^3} + \sin y)\, dx$

$12 \cdot 6 = 72$

a) O polinômio característico é dado por: $3r^2 - 6r + 6 = 0$ $\quad \Delta = 36 - 4(3)(6)$ $\quad \Delta = -36$

$y(x) = y_h + y_p$ $\quad \therefore r = \frac{6 \pm 6i}{6}$ $\quad \therefore r_1 = 1 + i$, $\quad r_2 = 1 - i$

• Portanto, a solução homogênea da EDO é: $y_h(x) = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$

• A solução particular é dada por: $y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$, em que $\begin{cases} y_{p_1}(x) = Ax^2 + Bx + C \\ y_{p_2}(x) = Ae^{2x}(B\cos x + C\sin x) \end{cases}$

• Resolvendo y_{p_1}: Substituindo na EDO

$y_{p_1}'(x) = 2Ax + B$
$y_{p_1}''(x) = 2A$

$6A - 12Ax - 6B + 6Ax^2 + 6Bx + 6C = x^2$

$x^2(6A) + x(-12A + 6B) + (6A - 6B + 6C) = x^2$

$\therefore 6A = 1$, $\quad -12A + 6B = 0$, $\quad 6A - 6B + 6C = 0$ $\quad A = \frac{1}{6}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{6}$

$\therefore y_{p_1} = \frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} + \frac{1}{6}$

$y_{p_2}(x) = Ae^{2x}\cos x + Be^{2x}\sin x$

$y_{p_2}'(x) = 2Ae^{2x}\cos x - Ae^{2x}\sin x + 2Be^{2x}\sin x + Be^{2x}\cos x$

$y_{p_2}'(x) = e^{2x}(2A\cos x - A\sin x + 2B\sin x + B\cos x)$

$y_{p_2}'(x) = e^{2x}[\cos x(2A + B) + \sin x(2B - A)]$

2,5

• Resolvendo y_{p_2}:

$y_{p_2}''(x) = 4Ae^{2x}\cos x - 2Ae^{2x}\sin x - (2Ae^{2x}\sin x + Ae^{2x}\cos x) + 4Be^{2x}\sin x + 2Be^{2x}\cos x + 2Be^{2x}\cos x - Be^{2x}\sin x$

$= e^{2x}(4A\cos x - 2A\sin x - 2A\sin x + A\cos x + 4B\sin x + 2B\cos x + 2B\cos x - B\sin x)$

$= e^{2x}[\cos x(4A + A + 2B + 2B) + \sin x(-2A - 2A + 4B - B)]$

$= e^{2x}[\cos x(5A + 4B) + \sin x(-4A + 3B)]$

• Substituindo na EDO:

$3e^{2x}[\cos x(5A + 4B) + \sin x(-4A + 3B)] - 6e^{2x}[\cos x(2A + B) + \sin x(2B - A)] + 6e^{2x}[A\cos x + B\sin x] = e^{2x}\cos x$

$e^{2x}[\cos x(15A + 12B - 12A - 6B + 6A + 6B) + \sin x(-12A + 9B - 12B + 6A + 6A + 6B)] = e^{2x}\cos x$

$e^{2x}[\cos x(9A) + \sin x(3B)] = e^{2x}\cos x$ $\quad \therefore 9A = 1$ e $3B = 0$ $\quad \therefore A = \frac{1}{9}$ e $B = 0$ $\quad \therefore y_{p_2}(x) = \frac{e^{2x}\cos x}{9}$

~~Substituindo y_{P_2} na EDO:~~

~~$3e^{2x}[\cos x(3Ax+4A+4Bx+2B)+\sin x(3Bx+4B-2A)]-6e^{2x}[\cos x(2Ax+A+Bx)+\sin x(2Bx+B-Ax)]+6e^{2x}(Ax\cos x+Bx\sin x)$~~
~~$=e^{2x}\cos x$~~

~~$e^{2x}\cos x[9Ax+12A+12Bx+6B-12Ax-6A-6Bx+6Ax]$~~

$$y(x)=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+\frac{x^2}{6}+\frac{x}{3}+\frac{1}{6}+\frac{e^{2x}\cos x}{9}$$

~~$\int (x^2e^{x^3}+x^2\sin y)\,dy = \underbrace{x^2e^{x^3}y - x^2\cos y + K(x)}_{\text{derivando em } x},\ (2xe^{x^3}+x^2 3x^2 e^{x^3})y - 2x\cos y + K'(x)$~~

b) $(e^{x^3}+\sin y)dx+\left(\frac{x}{3}\cos y\right)dy=0$

∴ Pela condição de Euler:

$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ para a eq. ser exata

∴ $\cos y=\frac{1}{3}\cos y$

Portanto é necessário encontrar um fator integrante que ao multiplicar a equação, a torne exata.

∴ $h(x)=\dfrac{\cos y-\frac{\cos y}{3}}{\frac{x\cos y}{3}}=\frac{2}{x}$

Portanto, o fator integrante é

$e^{\int\frac{2}{x}dx}=e^{2\ln|x|}=e^{\ln|x|^2}=x^2$

Portanto a equação fica:

$(x^2e^{x^3}+x^2\sin y)dx+\left(\frac{x^3}{3}\cos y\right)dy=0$

∂y $\quad$ ∂x

$x^2\cos y=\frac{3x^2}{3}\cos y$ ∴ exata

$\int x^2e^{x^3}+x^2\sin y\,dx=\int x^2e^{x^3}dx+\int x^2\sin y\,dx=\underbrace{\frac{e^{x^3}}{3}+C+\sin y\frac{x^3}{3}+g(y)}_{\text{deriva em } y}$

$u=x^3$
$du=3x^2dx$

$\to \frac{x^3}{3}\cos y+g'(y)$ ∴ comparando com $\left(\frac{x^3}{3}\cos y\right)dy$ é possível

∴ achar que $g'(y)=0$ ∴ $g(y)=C_1$

∴ $u(x,y)=\frac{e^{x^3}}{3}+\sin y\frac{x^3}{3}+C_1=C_2$
$=C$

4,5

Para $y(0)=0$: $\quad \frac{e^0}{3}+\sin(0)\frac{(0)^3}{3}=C$

$\frac{1}{3}=C$

∴ Solução: $u(x,y)=\frac{e^{x^3}}{3}+\sin y\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}$