Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
3a. Prova - 1o. Semestre 2018 - 26/06/2018

Turma A
Questão 1. (2,0 pontos) Calcule a massa da superfície S de equação

$$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$$

e densidade $\delta(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, com $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$.

Solução:

Vamos parametrizar a esfera S utilizando coordenadas esféricas com centro em $(0,0,2)$. Seja σ tal parametrização.

$$\sigma(\theta,\phi) = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, 2+\cos\phi)$$

$$\theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi]$$

Calculando os termos necessários,

$$\sigma_\theta \wedge \sigma\phi = (-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0) \wedge (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi) = -\sin\phi(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

$$\| \sigma_\theta \wedge \sigma\phi \| = \sin\phi$$

A massa de S é, então,

$$\int_S \delta(x,y,z)\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\phi}{\sqrt{5+4\cos\phi}}\, d\phi\, d\theta$$

Fazendo $u = 5 + 4\cos\phi \Rightarrow du = -4\sin\phi\, d\phi$

$$= 2\pi \int_1^9 \frac{u^{-1/2}}{4} du = \pi\sqrt{u}\Big|_1^9 = 2\pi$$

Questão 2. (2,0 pontos) Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x, 0, z)$ e S é a parte do parabolóide $y = x^2 + z^2 + 1$ limitado pelo cilíndro $x^2 + z^2 = 16$ e orientado por $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{j} > 0$.

Solução:

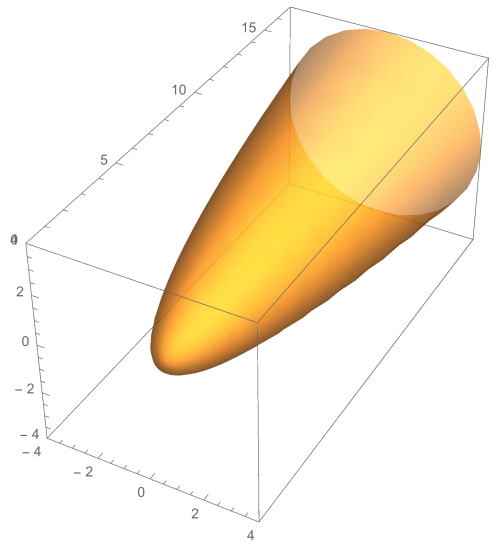

Figura 1: Superfície S

Parametrizando S, temos:

$$\sigma(u, v) = (u, u^2 + v^2 + 1, v),\ (u, v) \in R$$

Sendo:

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 \leq 16\}$$

Calculando as derivadas parciais de σ_1 e σ_2, temos:

$$\sigma_u = (1, 2u, 0)$$

$$\sigma_v = (0, 2v, 1)$$

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (2u, -1, 2v)$$

Como $\vec{n} \cdot \vec{j} > 0$, temos que $\vec{n}\, dS = (-2u, 1, -2v)\, du\, dv$.

Calculando a integral de superfície:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R (u, 0, v) \cdot (-2u, 1, -2v)\, du\, dv = -2 \iint_R (u^2 + v^2)\, du\, dv$$

Passando para coordenadas polares:

$$= -2 \int_0^{2\pi} \int_0^4 r^3\, dr\, d\theta = -2 \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^4 \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = -256\pi$$

Questão 3. (3,0 pontos) Seja

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+1}, \frac{y}{x^2+y^2+1} + e^{x^2}, 1\right).$$

Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ onde S é a superfície $z = 2-\sqrt{x^2+y^2+1} \geq 0$ orientado pela normal unitária $\vec{n}$ tal que $\vec{n}\cdot\vec{k} \geq 0$.

Solução:

Gostaríamos de utilizar o Teorema da Divergência para calcular o fluxo. Como S não é uma superfície fechada, definimos uma superfície $S1$ como na figura abaixo de modo que a união de S e $S1$ delimitam uma região, chamada de R.

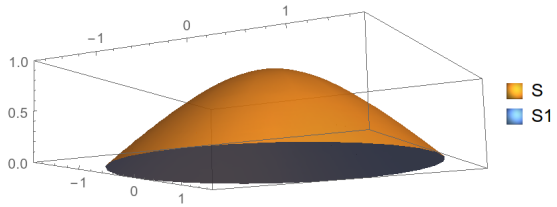

Figura 2: Superfícies S e $S1$

O Teorema da Divergência garante que, dadas orientações consistentes nas superfícies,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint_{S1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint_R div\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

Vamos calcular cada integral separadamente. $S1$ tem bordo igual à intersecção de S com o plano $z=0$ e está contida no plano $z=0$. Seja σ uma parametrização de $S1$.

$$0 = 2-\sqrt{x^2+y^2+1} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{x^2+y^2+1} \Rightarrow x^2+y^2 = 3$$

$$\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 0)$$
$$r \in [0,\sqrt{3}], \theta \in [0,2\pi]$$

A normal de $S1$ consistente com o Teorema é $-\vec{k}$.

$$\| \sigma_r \wedge \sigma_\theta \| = \| (\cos\theta, \sin\theta, 0) \wedge (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0) \| = \| (0,0,r) \| = r$$

Logo, o fluxo de $\vec{F}$ sobre $S1$ é

$$\iint_{S1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \vec{F}(\sigma(r,\theta))\cdot(-\vec{k}) \| \sigma_r \wedge \sigma_\theta \| \, dr\,d\theta = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} r\,dr\,d\theta = -3\pi$$

Podemos parametrizar a região R utilizando coordenadas cilíndricas.

$$\phi_R(r,\theta,w) = (r\cos\theta, r\sin\theta, w)$$

$$Dom(\phi) = \{(r,\theta,w) : 0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq w \leq 2 - \sqrt{r^2+1}\}$$

$$|Jac(\phi)| = r$$

O divergente de $\vec{F}$ e a integral tripla são

$$div\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+y^2+1}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{y}{x^2+y^2+1} + e^{x^2}\Big) + \frac{\partial 1}{\partial z} = \frac{(x^2+y^2+1)(1+1) - 2x^2 - 2y^2}{(x^2+y^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\iiint_R div\vec{F}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2-\sqrt{r^2+1}} \frac{2r}{(r^2+1)^2}\, dw\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r(2-\sqrt{r^2+1})}{(r^2+1)^2}\, dr\, d\theta =$$

$$2\pi\int_1^4 \frac{2-\sqrt{u}}{u^2} du = 2\pi\Big(\frac{-2}{u} + \frac{2}{\sqrt{u}}\Big)_1^4 = 2\pi\Big(-\frac{1}{2} + 1 + 2 - 2\Big) = \pi$$

Portanto, como a orientação dada para S no enunciado é consistente com o Teorema da Divergência, por este, temos

$$\iint_{S1} \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \pi - (-3\pi) = 4\pi$$

Questão 4. (3,0 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-(y-1)}{x^2+(y-1)^2} + z, \frac{x}{x^2+(y-1)^2}, e^{z^3} \right)$$

e γ é a intersecção da superfície $z = (y-1)^2$ e $x^2 + (y-1)^2 = 1$ orientada de modo que sua projeção no plano xy é percorrida no sentido horário.

Solução:

Primeiramente, vamos separar $\vec{F}$ em duas partes, de modo que $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$$\vec{F_1} = (z, 0, e^{z^3})$$

$$\vec{F_2} = \left(\frac{-(y-1)}{x^2+(y-1)^2}, \frac{x}{x^2+(y-1)^2}, 0 \right)$$

Vamos primeiro calcular a integral de linha de $\vec{F_1}$. Calculando seu rotacional, temos:

$$Rot\vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zy & 0 & e^{z^3} \end{vmatrix} = (0,1,0)$$

Sendo assim, temos que o campo $\vec{F_1}$ não é conservativo. Além disso, temos que $\vec{F_1}$ é definido para todo o $\mathbb{R}^3$. Assim, utilizamos o Teorema de Stokes para calcular sua integral.

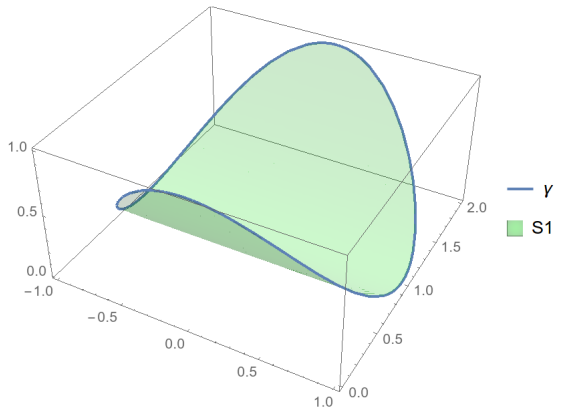

Figura 3: Superfície S_1 e curva γ

Seja S_1 a superfície $z = (y-1)^2$ limitada pelo cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$, com normal orientada de modo que $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ (sentido induzido pela curva γ). Como γ é bordo de S_1, aplicando o teorema de Stokes, temos:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} Rot\vec{F_1} \cdot \vec{n}\, dS$$

Parametrizando S_1, temos:

$$\sigma_1(u,v) = (u, v+1, v^2),\ (u,v) \in R_1$$

Sendo:

$$R_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 \leq 1\}$$

Calculando as derivadas parciais de σ_1, temos:

$$\sigma_{1\,u} = (1,0,0)$$

$$\sigma_{1\,v} = (0,1,2v)$$

$$\sigma_{1\,u} \wedge \sigma_{1\,v} = (0,-2v,1)$$

Como $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$, temos que $\vec{n}\, dS = (0, 2v, -1)\, du\, dv$.

Portanto:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} Rot\vec{F_1} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{R_1} (0,1,0) \cdot (0,2v,-1)\, du\, dv = 2 \iint_{R_1} v\, du\, dv$$

Como R_1 é simétrica em relação a v e o integrando é uma função impar em v, temos que:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = 2 \iint_{R_1} v\, du\, dv = 0$$

Finalmente, iremos calcular a integral do campo $\vec{F_2}$. Calculando seu rotacional, temos:

$$Rot\vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-(y-1)}{x^2+(y-1)^2} & \frac{x}{x^2+(y-1)^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1 \cdot (x^2 + (y-1)^2) - x(2x)}{(x^2 + (y-1)^2)^2} + \frac{1 \cdot (x^2 + (y-1)^2) - (y-1)(2(y-1))}{(x^2 + (y-1)^2)^2} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

$\vec{F_2}$ possui o rotacional nulo, porém, seu domínio não é simplesmente conexo, pois o campo não é definido no eixo $(0,1,z), z \in \mathbb{R}$. Sendo assim, aplicaremos o Teorema de Stokes, tomando o cuidado de escolher uma superfície que não cruze esse eixo.

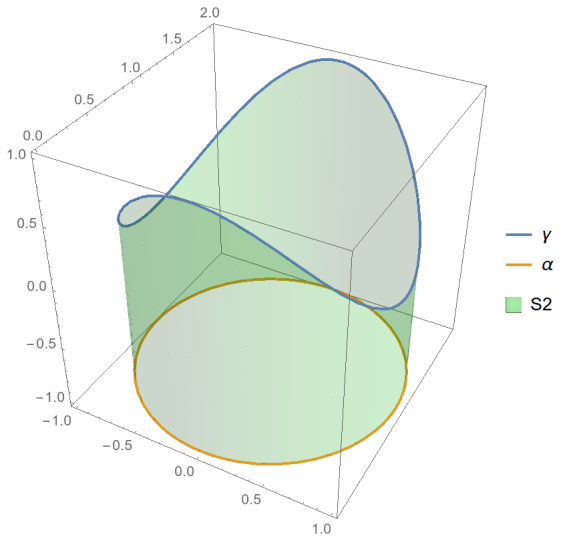

Figura 4: Superfície S_2 e curvas γ e α

Seja S_2 o cilindro $x^2 + (y-1)^2 = 1$ limitado superiormente por $z = (y-1)^2$ e inferiomente pelo plano $z = -1$, com normal exterior (sentido induzido pela curva γ). Como γ é bordo de S_2, e denomindando por α o outro bordo de S_2, aplicando o Teorema de Stokes, temos:

$$\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} Rot\vec{F_2} \cdot \vec{n}\, dS = 0$$

A normal de S_2 induz sentido anti-horário a α. Sendo assim, parametrizando α:

$$\alpha(t) = (\cos t, 1 + \sin t, -1),\ t \in [0, 2\pi]$$

Portanto, a integral de $\vec{F_2}$ sobre γ é dada por:

$$\int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = -\int_\alpha \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \Big(-\frac{\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1}, 0\Big) \cdot \Big(-\sin t, \cos t, 0\Big) dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 - 2\pi = -2\pi$$

Turma B

Questão 1. (2,0 pontos) Calcule a massa da superfície S de equação

$$x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 1$$

e densidade $\delta(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, com $\sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$.

Solução:

Vamos parametrizar a esfera S utilizando coordenadas esféricas com centro em $(0,0,-2)$. Seja σ tal parametrização.

$$\sigma(\theta,\phi) = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, -2+\cos\phi)$$

$$\theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi]$$

Calculando os termos necessários,

$$\sigma_\theta \wedge \sigma\phi = (-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0) \wedge (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi) = -\sin\phi(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

$$\| \sigma_\theta \wedge \sigma\phi \| = \sin\phi$$

A massa de S é, então,

$$\int_S \delta(x,y,z)\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\phi}{\sqrt{5-4\cos\phi}}\, d\phi\, d\theta$$

Fazendo $u = 5 - 4\cos\phi \Rightarrow du = 4\sin\phi\, d\phi$

$$= 2\pi \int_1^9 \frac{u^{-1/2}}{4} du = \pi\sqrt{u}\Big|_1^9 = 2\pi$$

Questão 2. (2,0 pontos) Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$ e S é a parte do parabolóide $z = x^2 + y^2 + 1$ limitado pelo cilíndro $x^2 + y^2 = 9$ e orientado por $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$.

Solução:

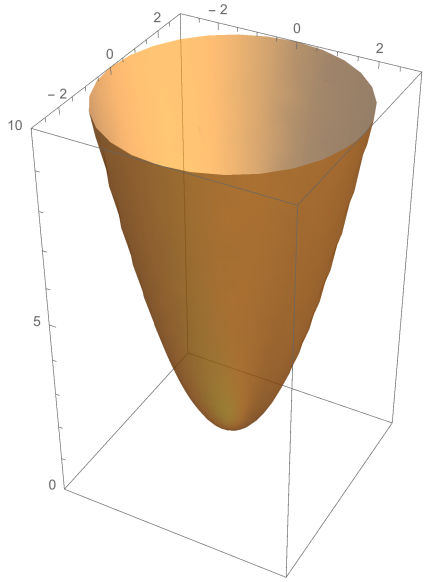

Figura 5: Superfície S

Parametrizando S, temos:

$$\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2 + 1),\ (u, v) \in R$$

Sendo:

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 \leq 9\}$$

Calculando as derivadas parciais de σ_1 e σ_2, temos:

$$\sigma_u = (1, 0, 2u)$$

$$\sigma_v = (0, 1, 2v)$$

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = (-2u, -2v, 1)$$

Como $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$, temos que $\vec{n}\, dS = (2u, 2v, -1)\, du\, dv$.

Calculando a integral de superfície:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \iint_R (u, v, 0) \cdot (2u, 2v, -1)\, du\, dv = 2 \iint_R (u^2 + v^2)\, du\, dv$$

Passando para coordenadas polares:

$$= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3\, dr\, d\theta = 2 \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^3 \cdot \theta\Big|_0^{2\pi} = 81\pi$$

Questão 3. (3,0 pontos) Seja

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+z^2+1}, 1, \frac{z}{x^2+z^2+1} + e^{x^2}\right).$$

Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma$ onde S é a superfície $y = 2-\sqrt{x^2+z^2+1} \geq 0$ orientado pela normal unitária $\vec{n}$ tal que $\vec{n}\cdot\vec{k} \geq 0$.

Solução:

Gostaríamos de utilizar o Teorema da Divergência para calcular o fluxo. Como S não é uma superfície fechada, definimos uma superfície $S1$ como na figura abaixo de modo que a união de S e $S1$ delimitam uma região, chamada de R.

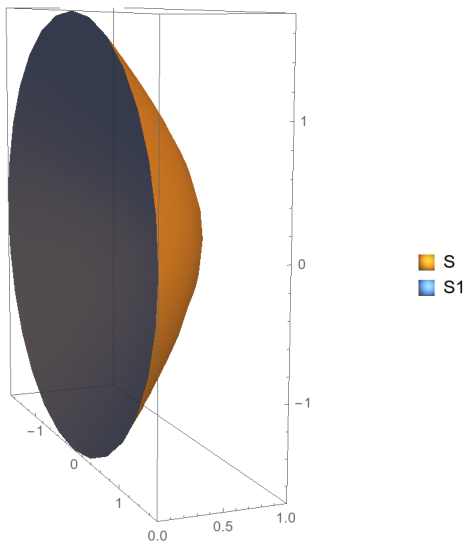

Figura 6: Superfícies S e $S1$

O Teorema da Divergência garante que, dadas orientações consistentes nas superfícies,

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma + \iint_{S1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint_R div\vec{F}\,dx\,dy\,dz$$

Vamos calcular cada integral separadamente. $S1$ tem bordo igual à intersecção de S com o plano $y=0$ e está contida no plano $y=0$. Seja σ uma parametrização de $S1$.

$$0 = 2-\sqrt{x^2+z^2+1} \Leftrightarrow 2 = \sqrt{x^2+z^2+1} \Rightarrow x^2+z^2 = 3$$

$$\sigma(r,\theta) = (r\cos\theta, 0, r\sin\theta)$$
$$r \in [0,\sqrt{3}], \theta \in [0,2\pi]$$

A normal de $S1$ consistente com o Teorema é $-\vec{j}$.

$$\parallel \sigma_r \wedge \sigma_\theta \parallel = \parallel (\cos\theta, 0, \sin\theta) \wedge (-r\sin\theta, 0, r\cos\theta) \parallel = \parallel (0,r,0) \parallel = r$$

Logo, o fluxo de $\vec{F}$ sobre $S1$ é

$$\iint_{S1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \vec{F}(\sigma(r,\theta)) \cdot (-\vec{j}) \parallel \sigma_r \wedge \sigma_\theta \parallel \, dr\, d\theta = -\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} r\, dr\, d\theta = -3\pi$$

Podemos parametrizar a região R utilizando coordenadas cilíndricas.

$$\phi_R(r,\theta,w) = (r\cos\theta, w, r\sin\theta)$$

$$Dom(\phi) = \{(r,\theta,w) : 0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq w \leq 2 - \sqrt{r^2+1}\}$$

$$|Jac(\phi)| = r$$

O divergente de $\vec{F}$ e a integral tripla são

$$div\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{x}{x^2+z^2+1}\Big) + \frac{\partial 1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{z}{x^2+z^2+1} + e^{x^2}\Big) = \frac{(x^2+z^2+1)(1+1) - 2x^2 - 2z^2}{(x^2+z^2+1)^2} = \frac{2}{(x^2+z^2+1)^2}$$

$$\iiint_R div\vec{F}\, dx\, dy\, dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \int_0^{2-\sqrt{r^2+1}} \frac{2r}{(r^2+1)^2}\, dw\, dr\, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2r(2-\sqrt{r^2+1})}{(r^2+1)^2}\, dr\, d\theta =$$

$$2\pi \int_1^4 \frac{2-\sqrt{u}}{u^2} du = 2\pi\Big(\frac{-2}{u} + \frac{2}{\sqrt{u}}\Big)_1^4 = 2\pi\Big(-\frac{1}{2} + 1 + 2 - 2\Big) = \pi$$

Portanto, como a orientação dada para S no enunciado é consistente com o Teorema da Divergência, por este, temos

$$\iint_{S1} \vec{F} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \pi - (-3\pi) = 4\pi$$

Questão 4. (3,0 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2} + z, \frac{x}{x^2+(y-2)^2}, e^{z^3} \right)$$

e γ é a intersecção da superfície $z = (y-2)^2$ e $x^2 + (y-2)^2 = 1$ orientada de modo que sua projeção no plano xy é percorrida no sentido horário.

Solução:

Primeiramente, vamos separar $\vec{F}$ em duas partes, de modo que $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

$$\vec{F_1} = (z, 0, e^{z^3})$$

$$\vec{F_2} = \left(\frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2}, \frac{x}{x^2+(y-2)^2}, 0 \right)$$

Vamos primeiro calcular a integral de linha de $\vec{F_1}$. Calculando seu rotacional, temos:

$$Rot\vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ zy & 0 & e^{z^3} \end{vmatrix} = (0,1,0)$$

Sendo assim, temos que o campo $\vec{F_1}$ não é conservativo. Além disso, temos que $\vec{F_1}$ é definido para todo o $\mathbb{R}^3$. Assim, utilizamos o Teorema de Stokes para calcular sua integral.

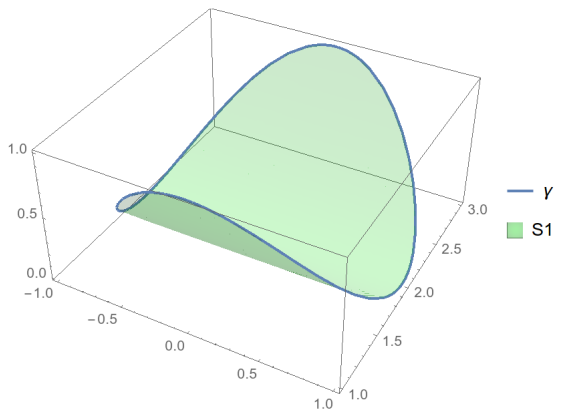

Figura 7: Superfície S_1 e curva γ

Seja S_1 a superfície $z = (y-2)^2$ limitada pelo cilindro $x^2 + (y-2)^2 = 1$, com normal orientada de modo que $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$ (sentido induzido pela curva γ). Como γ é bordo de S_1, aplicando o teorema de Stokes, temos:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} Rot\vec{F_1} \cdot \vec{n}\, dS$$

Parametrizando S_1, temos:

$$\sigma_1(u,v) = (u, v+2, v^2),\ (u,v) \in R_1$$

Sendo:

$$R_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 \leq 1\}$$

Calculando as derivadas parciais de σ_1, temos:

$$\sigma_{1\,u} = (1,0,0)$$

$$\sigma_{1\,v} = (0,1,2v)$$

$$\sigma_{1\,u} \wedge \sigma_{1\,v} = (0,-2v,1)$$

Como $\vec{n} \cdot \vec{k} < 0$, temos que $\vec{n}\, dS = (0, 2v, -1)\, du\, dv$.

Portanto:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = \iint_{S_1} Rot\vec{F_1} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{R_1} (0,1,0) \cdot (0,2v,-1)\, du\, dv = 2 \iint_{R_1} v\, du\, dv$$

Como R_1 é simétrica em relação a v e o integrando é uma função impar em v, temos que:

$$\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = 2 \iint_{R_1} v\, du\, dv = 0$$

Finalmente, iremos calcular a integral do campo $\vec{F_2}$. Calculando seu rotacional, temos:

$$Rot\vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-(y-2)}{x^2+(y-2)^2} & \frac{x}{x^2+(y-2)^2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{1 \cdot (x^2 + (y-2)^2) - x(2x)}{(x^2+(y-2)^2)^2} + \frac{1 \cdot (x^2 + (y-2)^2) - (y-2)(2(y-2))}{(x^2+(y-2)^2)^2} \right) \vec{k} = \vec{0}$$

$\vec{F_2}$ possui o rotacional nulo, porém, seu domínio não é simplesmente conexo, pois o campo não é definido no eixo $(0,2,z), z \in \mathbb{R}$. Sendo assim, aplicaremos o Teorema de Stokes, tomando o cuidado de escolher uma superfície que não cruze esse eixo.

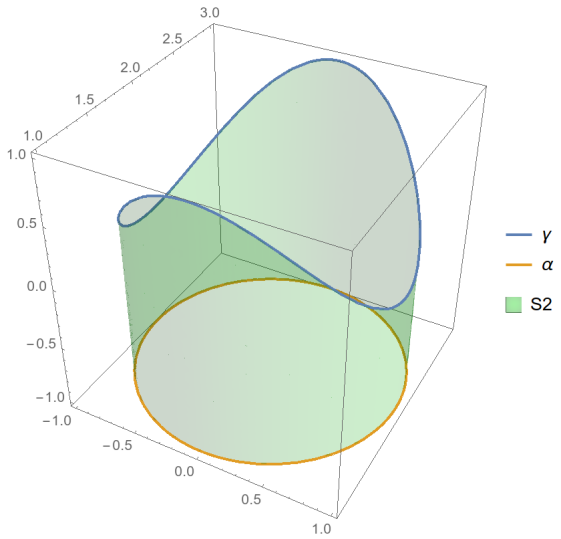

Figura 8: Superfície S_2 e curvas γ e α

Seja S_2 o cilindro $x^2 + (y-2)^2 = 1$ limitado superiormente por $z = (y-2)^2$ e inferiomente pelo plano $z = -1$, com normal exterior (sentido induzido pela curva γ). Como γ é bordo de S_2, e denomindando por α o outro bordo de S_2, aplicando o Teorema de Stokes, temos:

$$\int_\gamma \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \iint_{S_2} Rot\vec{F}_2 \cdot \vec{n}\, dS = 0$$

A normal de S_2 induz sentido anti-horário a α. Sendo assim, parametrizando α:

$$\alpha(t) = (\cos t, 2 + \sin t, -1),\ t \in [0, 2\pi]$$

Portanto, a integral de $\vec{F}_2$ sobre γ é dada por:

$$\int_\gamma \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = -\int_\alpha \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} \Big(-\frac{\sin t}{1}, \frac{\cos t}{1}, 0\Big) \cdot \Big(-\sin t, \cos t, 0\Big) dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi$$

$$\therefore \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 - 2\pi = -2\pi$$