MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III
Escola Politécnica - 2ª Prova - 22/05/2018

Tipo A

Nome : _____

NºUSP : _____

Professor(a) : _____ Turma : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Escreva de forma organizada e clara, justificando suas respostas.

1ª Questão (2 pontos). Calcule a integral de linha $\int_\gamma x\,(z-20)\,ds$, onde γ é o trecho da interseção das superficies $z = x^2 + y^2$ e $z = 12 - 4y$, do ponto $(4, -2, 20)$ ao ponto $(0, 2, 4)$ e que está contido no semi-espaço $x \geq 0$.

Solução.

A curva interseção das duas superficies: $x^2+(y+2)^2 = 16$. Logo podemos parametrizar γ como

$$x = 4\,\cos(t), \quad y = -2 + 4\,\sin(t), \quad z = 20 - 16\,\sin(t), \quad \text{para } t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Assim,

$$\int_\gamma x(z-20)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\,\cos(t)(-16\,\sin(t))\sqrt{(-4\,\sin(t))^2 + (4\,\cos(t))^2 + (-16\,\cos(t))^2}dt$$

$$= -256\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)\sqrt{1 + 16\,\cos^2(t)}\,dt = \frac{256}{48}\left(1 + 16\,\cos^2(t)\right)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}\left(1 - (17)^{3/2}\right).$$

$\square$

2ª Questão (2,5 pontos). Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_\gamma dx + (x + e^{y^2})\, dy$, onde γ é o trecho da curva $y = -x^2 + 4\,x$, do ponto $(0,0)$ ao ponto $(4,0)$.

Solução.

O campo $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$, onde $P(x,y) = 1$ e $Q(x,y) = x + e^{y^2}$, é de classe C^1 e satisfaz $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Então consideramos a curva B parametrizada por $\psi(t) = (4-t, 0)$, com $0 \le t \le 4$. Pelo Teorema de Green temos que

$$\int_\gamma dx + \left(x + e^{y^2}\right)\, dy + \int_B dx + \left(x + e^{y^2}\right)\, dy = -\int\int_R dx\, dy,$$

onde R é a região do plano limitada por γ e B, esta região pode ser descrita como sendo o conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $0 \le y \le -x^2 + 4\,x$ e $0 \le x \le 4$.

Com a parametrização de B resulta que

$$\int_B dx + \left(x + e^{y^2}\right)\, dy = -\int_0^4 dt = -4.$$

Por outro lado, com a descrição de R acima, o Teorema de Fubini implica que

$$\int\int_R dx\, dy = \int_0^4 \int_0^{-x^2+4x} dy\, dx = \int_0^4 (-x^2 + 4x)\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2\right)\Big|_0^4 = \frac{32}{3}.$$

Concluímos então que

$$\int_\gamma dx + \left(x + e^{y^2}\right)\, dy = 4 - \frac{32}{3} = -\frac{20}{3}.$$

$\square$

3ª Questão (2,5 pontos). Calcule a integral de linha

$$\int_\gamma \big(4y\ \cos(x^2) - 8x^2y\ \sin(x^2)\big)\ dx + \big(4x\ \cos(x^2) + 4y\big)\ dy,$$

onde γ é a curva parametrizada $\gamma(t) = (t, \cos(t))$, com $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Solução.

Identificamos $P = 4y\ \cos(x^2) - 8x^2y\ \sin(x^2)$ e $Q = 4x\ \cos(x^2) + 4y$, temos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4\cos(x^2) - 8x^2\sin(x^2) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Além disso, o campo F esta definido em todo o plano o qual é simplesmente-conexo, e P, Q tem derivadas parciais de primeira ordem continuas. Então segue-se que F é um campo conservativo. Logo existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$. Isto é, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y\ \cos(x^2) - 8x^2y\ \sin(x^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x\ \cos(x^2) + 4y.$$

Integrando segunda equação anterior em relação a y, temos que

$$f(x, y) = 4yx\cos(x^2) + 2y^2 + h(x).$$

Derivando f em relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y\cos(x^2) - 8yx^2\sin(x^2) + h'(x),$$

e comparando com a primeira equação, temos que $h'(x) = 0$. Logo

$$f(x, y) = 4yx\cos(x^2) + 2y^2.$$

Portanto pelo Teorema de integrais de linha temos:

$$\int_\gamma (4y\ \cos(x^2) - 8x^2y\ \sin(x^2)\, dx + (4x\ \cos(x^2) + 4y)\, dy = f(\gamma(\frac{\pi}{2})) - f(\gamma(0)) = f(\frac{\pi}{2}, 0) - f(0, 1) = -2.$$

$\square$

4ª Questão (3 pontos). Calcule a integral de linha

$$\int_\gamma \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{1+x^4} \right) dx + \left(\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + x \right) dy,$$

onde γ é a fronteira da região no plano determinada pelas desigualdades $y \geq -x-2$ e $y \leq -x^2+4$, orientada no sentido anti-horário.

Solução.

Os pontos de interseção das curvas $y=-x-2$ e $y=-x^2+4$ são $x=-2$ e $x=3$. Observamos que o campo de vetores

$$F(x,y) = (\frac{-y}{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{1+x^4}, \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + x)$$

apresenta uma indeterminação na região limitada pelas desigualdades. Logo vamos dividir o cálculo da integral em duas integrais de linha:

$$\int_\gamma (\frac{-y}{(x-1)^2+y^2})dx + (\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2})dy + \int_\gamma \sqrt{1+x^4}\, dx + xdy = A + B.$$

Para o calculo de A, isolamos o ponto $(1,0)$ pelo circulo C dado por $(x-1)^2+y^2=a^2$ com $a>0$ pequeno, orientado no sentido horário. Sendo $P = \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}$, $Q = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}$, temos que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-(x-1)^2}{((x-1)^2+y^2)^2} + \frac{(x-1)^2-y^2}{((x-1)^2+y^2)^2} = 0.$$

Logo por Teorema de Green:

$$\int\int_D (Q_x - P_y)dxdy = \int_\gamma Pdx + Qdy + \int_C Pdx + Qdy,$$

temos que

$$A = \int_\gamma Pdx+Qdy = \int_\gamma \frac{-y}{(x-1)^2+y^2}dx + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}dy = \int\int_D (Q_x - P_y)dxdy - \int_C Pdx+Qdy =$$

$$= \int_{-C} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin(t)}{a^2}(-a\sin(t)) + \frac{a\cos(t)}{a^2}(a\cos(t))dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

onde o circulo $-C$ e parametrizado por $x-1 = a\cos(t)$, $y = a\sin(t)$ para $t \in [0, 2\pi]$.

Cálculo de B: Aplicamos Teorema de Green direto para o campo $F(x,y) = (\sqrt{1+x^4}, x)$. Logo

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^4}\, dx + xdy = \int\int_D dxdy = \int_{-2}^{3}\int_{-x-2}^{4-x^2} dydx = \int_{-2}^{3}(6-x^2+x)dx = \frac{125}{6}.$$

Portanto

$$\int_\gamma (\frac{-y}{(x-1)^2+y^2} + \sqrt{1+x^4})dx + (\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + x)dy = 2\pi + \frac{125}{6}.$$

□

MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III
Escola Politécnica - 2ª Prova - 22/05/2018

Tipo B

Nome : _____

NºUSP : _____

Professor(a) : _____ Turma : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Escreva de forma organizada e clara, justificando suas respostas.

1ª Questão (2 pontos). Calcule a integral de linha $\int_\gamma x\,(z-10)\,ds$, onde γ é o trecho da interseção das superficies $z = x^2 + y^2$ e $z = 8 - 2y$, do ponto $(3, -1, 10)$ ao ponto $(0, 2, 4)$ e que está contido no semi-espaço $x \geq 0$.

Solução.

A curva interseção das duas superficies: $x^2+(y+1)^2 = 9$. Logo podemos parametrizar γ como

$$x = 3\,\cos(t), \quad y = -1 + 3\,\sin(t), \quad z = 10 - 6\,\sin(t), \quad \text{para } t \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

Assim,

$$\int_\gamma x(z-10)\,ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\,\cos(t)(-6\,\sin(t))\sqrt{(-3\,\sin(t))^2 + (3\,\cos(t))^2 + (-6\,\cos(t))^2}dt$$

$$= -54\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\sin(t)\sqrt{1 + 4\,\cos^2(t)}\,dt = \frac{54}{12}\left(1 + 4\,\cos^2(t)\right)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = \frac{9}{2}\left(1 - 5^{3/2}\right).$$

□

2ª Questão (2,5 pontos). Calcule a integral de linha $\displaystyle\int_\gamma dx + (x + e^{y^2})\, dy$, onde γ é o trecho da curva $y = -x^2 + 2\,x$, do ponto $(0,0)$ ao ponto $(2,0)$.

Solução.

O campo $\vec{F} = P\,\vec{i} + Q\,\vec{j}$, onde $P(x,y) = 1$ e $Q(x,y) = x + e^{y^2}$, é de classe C^1 e satisfaz $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$. Então consideramos a curva B, parametrizada por $\psi(t) = (2-t, 0)$, com $0 \le t \le 2$. Pelo Teorema de Green temos que

$$\int_\gamma dx + (x + e^{y^2})\, dy + \int_B dx + (x + e^{y^2})\, dy = -\int\int_R dx\, dy,$$

onde R é a região do plano limitada por γ e B. Esta região pode ser descrita como sendo o conjunto dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $0 \le y \le -x^2 + 2\,x$ e $0 \le x \le 2$.

Na parametrização de B dada acima obtemos que

$$\int_B dx + \left(x + e^{y^2}\right)\, dy = -\int_0^2 dt = -2.$$

Por outro lado, com a descrição de R acima, o Teorema de Fubini implica que

$$\int\int_R dx\, dy = \int_0^2 \int_0^{-x^2+2x} dy\, dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x)\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x^2\right)\Big|_0^2 = \frac{4}{3}.$$

Concluímos então que

$$\int_\gamma dx + \left(x + e^{y^2}\right)\, dy = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

$\square$

3ª Questão (2,5 pontos). Calcule a integral de linha

$$\int_\gamma \big(4y\sin(x^2) + 8x^2y\ \cos(x^2)\big)\ dx + \big(4x\sin(x^2) + 4y\big)\ dy,$$

onde γ é a curva parametrizada $\gamma(t) = (t, \cos(t))$, com $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Solução.

Identificamos $P = 4y\sin(x^2) + 8x^2y\ \cos(x^2)$ e $Q = 4x\sin(x^2) + 4y$, temos que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 4\sin(x^2) + 8x^2\cos(x^2) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Além disso, o campo F esta definido em todo o plano o qual é simplesmente-conexo, e P, Q tem derivadas parciais de primeira ordem continuas. Então segue-se que F é um campo conservativo. Logo existe $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = F$. Isto é, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y\sin(x^2) + 8x^2y\ \cos(x^2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 4x\sin(x^2) + 4y.$$

Integrando segunda equac cão anterior em relacao a y, temos que

$$f(x, y) = 4yx\sin(x^2) + 2y^2 + h(x).$$

Derivando f em relação a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4y\sin(x^2) + 8yx^2\cos(x^2) + h'(x),$$

e comparando com a primeira equação, temos que $h'(x) = 0$. Logo

$$f(x, y) = 4yx\sin(x^2) + 2y^2.$$

Portanto pelo teorema de integrais de linha temos:

$$\int_\gamma (4y\sin(x^2)+8x^2y\ \cos(x^2))\,dx+(4x\sin(x^2)+4y)\,dy = f(\gamma(\frac{\pi}{2}))-f(\gamma(0)) = f(\frac{\pi}{2},0)-f(0,1) = -2.$$

$\square$

4ª Questão (3 pontos). Calcule a integral de linha

$$\int_\gamma \left(\frac{-y}{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{1+x^4} \right) dx + \left(\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + x \right) dy,$$

onde γ é a fronteira da região no plano determinada pelas desigualdades $y \geq x-2$ e $y \leq -x^2+4$, orientada no sentido anti-horário.

Solução.

Os pontos de interseção das curvas $y = x-2$ e $x^2 = -y+4$ sao $x=-3$ e $x=2$. Observamos que o campo de vetores

$$F(x,y) = (\frac{-y}{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{1+x^4}, \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + x)$$

apresenta uma indeterminação na região limitada pelas desigualdades. Logo vamos dividir o calculo da integral em duas integrais de linha:

$$\int_\gamma (\frac{-y}{(x+1)^2+y^2})dx + (\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2})dy + \int_\gamma \sqrt{1+x^4}\, dx + xdy = A + B.$$

Para o calculo de A, isolamos o ponto $(-1,0)$ pelo circulo C dado por $(x+1)^2+y^2 = a^2$ com $a>0$ pequeno, orientado no sentido horário. Sendo $P = \frac{-y}{(x+1)^2+y^2}$ e $Q = \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}$, temos que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-(x+1)^2}{((x+1)^2+y^2)^2} + \frac{(x+1)^2-y^2}{((x+1)^2+y^2)^2} = 0.$$

Logo por Teorema de Green:

$$\int\int_D (Q_x - P_y)dxdy = \int_\gamma Pdx + Qdy + \int_C Pdx + Qdy,$$

temos que

$$A = \int_\gamma Pdx+Qdy = \int_\gamma \frac{-y}{(x+1)^2+y^2}dx + \frac{x+1}{(x+1)^2+y^2}dy = \int\int_D (Q_x - P_y)dxdy - \int_C Pdx+Qdy =$$

$$= \int_{-C} Pdx + Qdy = \int_0^{2\pi} \frac{-a\sin(t)}{a^2}(-a\sin(t)) + \frac{a\cos(t)}{a^2}(a\cos(t))dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

onde o circulo $-C$ e parametrizado por $x+1 = a\cos(t),\ y = a\sin(t)$ para $t \in [0, 2\pi]$.

Cálculo de B: Aplicamos Teorema de Green direto para o campo $F(x,y) = (\sqrt{1+x^4}, x)$. Logo

$$\int_\gamma \sqrt{1+x^4}\, dx + xdy = \int\int_D dxdy = \int_{-3}^{2}\int_{x-2}^{4-x^2} dydx = \int_{-3}^{2}(6-x^2-x)dx = \frac{125}{6}.$$

Portanto

$$\int_\gamma (\frac{-y}{(x+1)^2+y^2} + \sqrt{1+x^4})\, dx + (\frac{x+1}{(x+1)^2+y^2} + x)\, dy = 2\pi + \frac{125}{6}.$$

□