MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III
Escola Politécnica-1ª Prova-10/04/2018

Turma A

Nome : _____

NºUSP : _____

Professor(a) : _____Turma : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Escreva de forma organizada e clara, justificando suas respostas.

1ª Questão:(2 pontos) Calcule a integral dupla $\iint_D x\,dx\,dy$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Solução. A descrição de D em coordenadas cartesianas é:

$$D \ : \ \begin{cases} -\sqrt{4-x^2} \ \leq \ y \ \leq \sqrt{4-x^2} \\ 1 \ \leq \ x \ \leq 2 \end{cases}$$

Aplicando o teorema de Fubini temos que:

$$\iint_D x\ dx\,dy = \int_1^1 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} x\ dy\,dx = 2\int_1^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx = -\frac{2}{3}\left(4-x^2\right)^{3/2}\Big|_1^2 = 2\sqrt{3}$$

□

2ª Questão:(2 pontos) Calcule a integral iterada $\displaystyle\int_0^2 \int_{\ln(1+y)}^{\ln 3} \sqrt{-x+e^x}\,dx\,dy$.

Solução. A integral iterada corresponde a uma integral dupla na região D abaixo:

$$D \ : \ \begin{cases} \ln(1+y) \leq \ x \ \leq \ln 3 \\ 0 \leq \ y \ \leq 2 \end{cases}$$

Mas D também pode ser descrito da seguinte forma:

$$D \ : \ \begin{cases} 0 \leq \ y \ \leq -1+e^x \\ 0 \leq \ x \ \leq \ln 3 \end{cases}$$

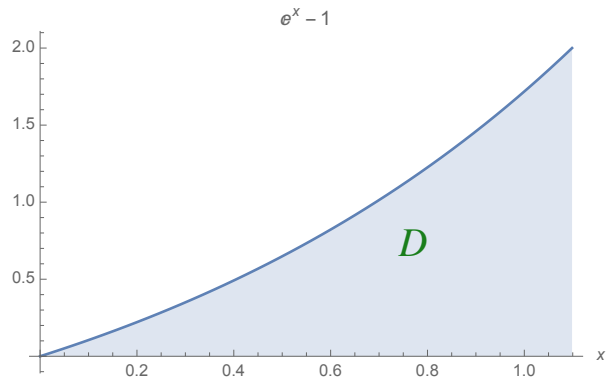


Figura 1: $-1 + e^x$

Portanto, usando o Teorema de Fubini, temos que

$$\int_0^2 \int_{\ln(1+y)}^{\ln 3} \sqrt{-x+e^x}\, dx\, dy = \int_0^{\ln 3} \int_0^{-1+e^x} \sqrt{-x+e^x}\, dy\, dx =$$

$$\int_0^{\ln 3} (-1+e^x)\, \sqrt{-x+e^x}\, dx = \frac{2}{3}\, (-x+e^x\,)^{3/2} \Big|_0^{\ln 3} = \frac{2}{3}\,(3-\ln 3)^{3/2} - \frac{2}{3}$$

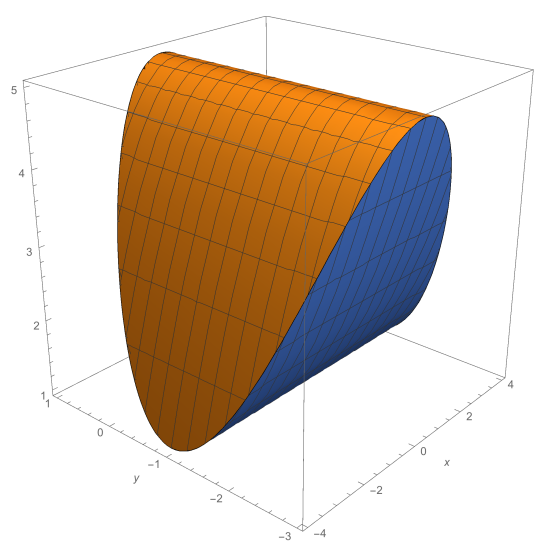
$\square$

3ª Questão:(3 pontos) Calcule o volume do sólido S limitado por $z = 5 - x^2/4$ e $z = 2 + 2y + y^2$.

Solução. S pode ser descrito em coordenadas cartesianas por:

$$S \;:\; \begin{cases} 2+2y+y^2 \leq & z & \leq 5 - x^2/4 \\ & (x,y) & \in \; D \end{cases}$$

Onde D está contido no plano xy e é limitado pela curva $2 + 2y + y^2 = 5 - x^2/4$, ou seja, $x^2/16 + (y+1)^2/4 = 1$.



Escolhendo então as coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x &= 4\,r\,\cos\theta \\ y &= -1 + 2\,r\,\operatorname{sen}\theta \\ z &= z, \end{cases}$$

onde $r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\,\pi \quad$ e $\quad z \in \mathbb{R}$. O sólido S descrito nestas coordenadas cilíndricas é:

$$S_{r\,\theta\,z} \;:\; \begin{cases} 1 + 4\,r^2\,\operatorname{sen}^2\theta \;\leq\; z \;\leq\; 5 - 4\,r^2\,\cos^2\theta \\ 0 \;\leq\; r \;\leq\; 1 \\ 0 \;\leq\; \theta \;\leq\; 2\,\pi \end{cases}$$

O módulo do determinante do jacobiano desta mudança de variável é $8r$, usando o teorema de mudança de variável e em seguida o teorema de Fubini, com a descrição de $S_{r\,\theta\,z}$ acima, temos que:

$$\iiint_S dx\,dy\,dz = \iiint_{S_{r\,\theta\,z}} 8\,r\;dr\,d\theta\,dz = 8\int_0^{2\,\pi}\int_0^1\int_{1+4\,r^2\,\operatorname{sen}^2\theta}^{5-4\,r^2\,\cos^2\theta} r\;dz\,dr\,d\theta =$$
$$8\int_0^{2\,\pi}\int_0^1 r\,(4-4\,r^2)\;dr\,d\theta = 8\int_0^{2\,\pi}(2\,r^2\;-r^4)\Big|_0^1\,d\theta = 8\int_0^{2\,\pi}\;d\theta = 16\,\pi$$

$\square$

4ª Questão:(3 pontos) Calcule a integral tripla $\displaystyle\iiint_S z\;dx\,dy\,dz$, onde S é o sólido constituído dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x^2 + y^2 + z^2 - 4z \leq 0$ e $y \geq |x|$.

Solução.

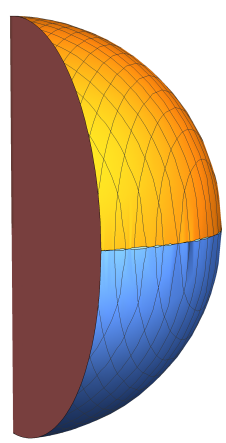


Figura 2: O sólido S

Escolhemos as coordenadas esféricas

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\,\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y & = & r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z & = & r\,\cos\,\varphi, \end{array}\right.$$

onde $r \geq 0$, $\quad 0 \leq \theta \leq 2\,\pi \quad$ e $\quad 0 \leq \varphi \leq \pi$. O sólido S descrito nestas coordenadas esféricas é:

$$S_{r\,\theta\,z}\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} 0 & \leq & r \leq 4\,\cos\,\varphi \\ \frac{\pi}{4} & \leq & \theta \leq \frac{3\,\pi}{4} \\ 0 & \leq & \varphi \leq \pi/2 \end{array}\right.$$

Lembrando que o módulo do determinante do jacobiano desta mudança de variável é $r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$, usando o teorema de mudança de variável e em seguida o teorema de Fubini, com a descrição de $S_{r\,\theta\,z}$ acima, temos que:

$$\iiint_S z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S_{r\,\theta\,\varphi}} r^3\,\cos\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\,\pi}{4}}\int_0^{4\,\cos\,\varphi} r^3\,\cos\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\,\pi}{4}} (\cos\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^{4\,\cos\,\varphi} d\theta\,d\varphi =$$

$$64\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\,\pi}{4}} \cos^5\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\theta\,d\varphi = 32\,\pi\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi = -\frac{32\,\pi}{6}\,\cos^6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\,\pi}{3}$$

$\square$

MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III
Escola Politécnica-1ª Prova-10/04/2018

Turma B

Nome : _____

NºUSP : _____

Professor(a) : _____Turma : _____

Q	N
1	
2	
3	
4	
Total	

Escreva de forma organizada e clara, justificando suas respostas.

1ª Questão:(2 pontos) Calcule a integral dupla $\iint_D y\,dx\,dy$, onde $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 \leq 4\}$.

Solução. D em coordenadas cartesianas é descrito por:

$$D \ : \ \begin{cases} \sqrt{4-y^2} \ \leq \ x \ \leq \sqrt{4-y^2} \\ 1 \ \leq \ y \ \leq 2 \end{cases}$$

Aplicando o teorema de Fubini temos que:

$$\iint_D y\ dx\,dy = \int_1^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} y\ dx\,dy = 2\int_1^2 y\sqrt{4-y^2}\ dy = -\frac{2}{3}\left(4-y^2\right)^{3/2}\Big|_1^2 = 2\sqrt{3}$$

$\square$

2ª Questão:(2 pontos) Calcule a integral iterada $\displaystyle\int_0^3 \int_{\ln(1+y)}^{\ln 4} \sqrt{-x+e^x}\ dx\,dy$.

Solução. A integral iterada corresponde a uma integral dupla na região D abaixo:

$$D \ : \ \begin{cases} \ln(1+y) \leq \ x \ \leq \ln 4 \\ 0 \leq \ y \ \leq 3 \end{cases}$$

Mas D também pode ser descrito da seguinte forma:

$$D \ : \ \begin{cases} 0 \leq \ y \ \leq -1+e^x \\ 0 \leq \ x \ \leq \ln 4 \end{cases}$$

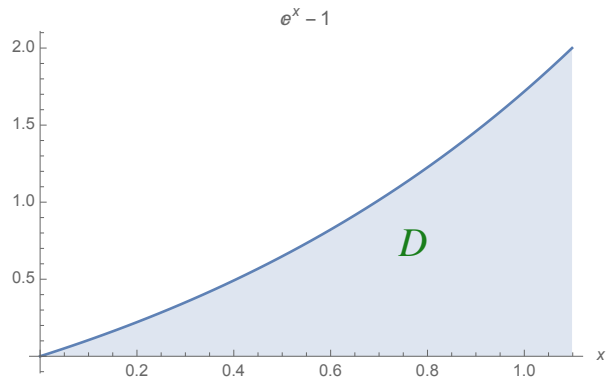


Figura 1: $-1 + e^x$

Portanto, usando o Teorema de Fubini, temos que

$$\int_0^3 \int_{\ln(1+y)}^{\ln 4} \sqrt{-x+e^x}\, dx\, dy = \int_0^{\ln 4} \int_0^{-1+e^x} \sqrt{-x+e^x}\, dy\, dx =$$

$$\int_0^{\ln 4} (-1+e^x)\, \sqrt{-x+e^x}\, dx = \frac{2}{3}\, (-x+e^x\,)^{3/2} \Big|_0^{\ln 4} = \frac{2}{3}\,(4-\ln 4)^{3/2} - \frac{2}{3}$$

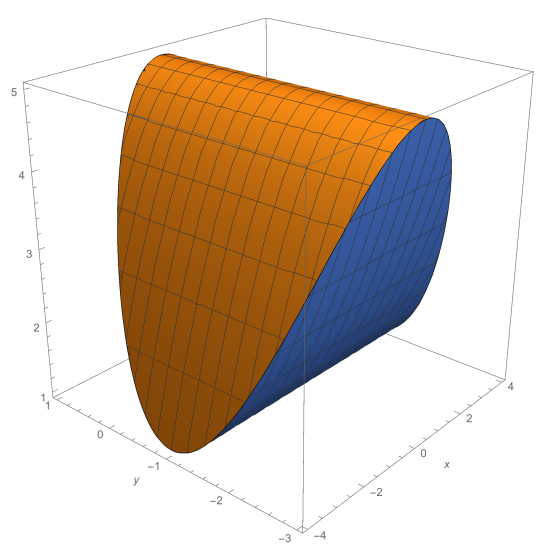
$\square$

3ª Questão:(3 pontos) Calcule o volume do sólido S limitado por $z = 5 - y^2/4$ e $z = 2 + 2x + x^2$.

Solução. S pode ser descrito em coordenadas cartesianas por:

$$S \;:\; \begin{cases} 2+2x+x^2 \leq & z & \leq 5 - y^2/4 \\ & (x,y) & \in \; D \end{cases}$$

Onde D está contido no plano xy e é limitado pela curva $2+2x+x^2 = 5 - y^2/4$, ou seja, $(x+1)^2/4 + y^2/16 = 1$.



Escolhendo então as coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} x &= -1 + 2\,r\,\cos\theta \\ y &= 4\,r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z &= z, \end{cases}$$

onde $r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\,\pi \quad$ e $\quad z \in \mathbb{R}$. O sólido S descrito nestas coordenadas cilíndricas é:

$$S_{r\,\theta\,z} \;:\; \begin{cases} 1 + 4\,r^2\,\cos^2\theta \;\leq\; z \;\leq\; 5 - 4\,r^2\,\mathrm{sen}^2\theta \\ 0 \;\leq\; r \;\leq\; 1 \\ 0 \;\leq\; \theta \;\leq\; 2\,\pi \end{cases}$$

O módulo do determinante do jacobiano desta mudança de variável é $8r$, usando o teorema de mudança de variável e em seguida o teorema de Fubini com a descrição de $S_{r\,\theta\,z}$ acima temos que:

$$\iiint_S dx\,dy\,dz = \iiint_{S_{r\,\theta\,z}} 8\,r\;dr\,d\theta\,dz = 8\int_0^{2\,\pi}\int_0^1\int_{1+4\,r^2\,\cos^2\theta}^{5-4\,r^2\,\mathrm{sen}^2\theta} r\;dz\,dr\,d\theta =$$
$$8\int_0^{2\,\pi}\int_0^1 r\,(4-4\,r^2)\;dr\,d\theta = 8\int_0^{2\,\pi}(2\,r^2\;-r^4)\Big|_0^1\,d\theta = 8\int_0^{2\,\pi}d\theta = 16\,\pi$$

$\square$

4ª Questão:(3 pontos) Calcule a integral tripla $\displaystyle\iiint_S z\;dx\,dy\,dz$, onde S é o sólido constituído dos pontos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que $x^2 + y^2 + z^2 - 6z \leq 0$ e $y \geq |x|$.

Solução.

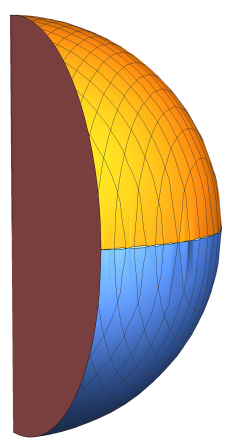


Figura 2: O sólido S

Escolhemos as coordenadas esféricas

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & r\,\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ y & = & r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z & = & r\,\cos\,\varphi, \end{array}\right.$$

onde $r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq 2\,\pi \quad \text{e} \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$.

O sólido S descrito nestas coordenadas esféricas é:

$$S_{r\,\theta\,z}\ :\ \left\{\begin{array}{lcl} 0 & \leq & r & \leq & 6\,\cos\,\varphi \\ \frac{\pi}{4} & \leq & \theta & \leq & \frac{3\,\pi}{4} \\ 0 & \leq & \varphi & \leq & \pi/2 \end{array}\right.$$

Lembrando que o módulo do determinante do jacobiano desta mudança de variável é $r^2\,\mathrm{sen}\,\varphi$, usando o teorema de mudança de variável e em seguida o teorema de Fubini, com a descrição de $S_{r\,\theta\,z}$ acima, temos que:

$$\iiint_S z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S_{r\,\theta\,\varphi}} r^3\,\cos\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\,\pi}{4}}\int_0^{6\,\cos\,\varphi} r^3\,\cos\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,dr\,d\theta\,d\varphi = \int_0^{\pi/2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\,\pi}{4}} (\cos\,\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi)\,\frac{r^4}{4}\Big|_0^{6\,\cos\,\varphi} d\theta\,d\varphi =$$

$$324\int_0^{\pi/2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\,\pi}{4}} \cos^5\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\theta\,d\varphi = 162\,\pi\int_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\,\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi = -\frac{162\,\pi}{6}\,\cos^6\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 27\,\pi$$

$\square$