Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
3a. Prova - 1º. Semestre 2017 - 04/07/2017

Turma B
1ª Questão: (4,0)

a) Seja S a parte do cilindro $y^2 + z^2 = 9$ que está no interior do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ com $z \geq 0$. Calcule a massa de S sendo a densidade $\delta(x, y, z) = z^3$

b) Calcule $\displaystyle\iint_S x\,dy \wedge dz + y\,dz \wedge dx + z\,dx \wedge dy$, sendo S a parte do plano $z + 2x - 3 = 0$ limitada pelo parabolóide $z = 4 - x^2 - 2y^2$, orientada com a normal unitária de modo que $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{k} > 0$.

Solução:

a) Primeiro parametrizamos a superfície S:

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{9 - v^2} \end{cases}$$

Calculando as derivadas parcias, temos:

$$\sigma_u \wedge \sigma_v = \left(0, \frac{v}{\sqrt{9 - v^2}}, 1\right)$$

e portanto

$$\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = \sqrt{\frac{v^2}{9 - v^2} + 1} = \sqrt{\frac{9}{9 - v^2}} = \frac{3}{\sqrt{9 - v^2}}.$$

O domínio de integração é $D_{u,v} = \{u^2 + v^2 \leq 9\}$.

Calculando a massa, obtemos:

$$M = \iint_{D_{u,v}} \left(\sqrt{9 - v^2}\right)^3 \frac{3}{\sqrt{9 - v^2}}\,du\,dv = 3 \iint_{D_{u,v}} (9 - v^2)\,du\,dv.$$

Fazemos mudança para coordenadas polares:

$$\begin{cases} u = \rho \cos\theta \\ v = \rho \sin\theta \end{cases}$$

O novo domínio de integração é dado por:

$$D_{\rho\theta} = \{(\rho, \theta) : 0 \leq \rho \leq 3,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Então, a integral acima fica:

$$
\begin{aligned}
M &= 3\int_0^3\int_0^{2\pi} \rho(9-\rho^2\sin^2\theta)\,d\theta d\rho = 3\int_0^3\int_0^{2\pi}\left(9\rho-\rho^3\frac{(1-\cos^2 2\theta)}{2}\right)\,d\theta d\rho \\
&= 3\int_0^3 (18\pi\rho-\rho^3\pi)\,d\rho = 3\left(81\pi-\frac{81\pi}{4}\right) = 3\left(\frac{243}{4}\right)\pi = \frac{729}{4}\pi.
\end{aligned}
$$

b) Uma parametrização possível para S está dada por:

$$
\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 3-2u. \end{cases}
$$

Assim,

$$
\sigma_u \wedge \sigma_v = (2,0,1)
$$

e o domínio de integração é

$$
\begin{aligned}
D_{u,v} &= \{(u,v) : 3-2u \leq 4-u^2-2v^2\} \\
&= \{(u,v) : u^2-2u+2v^2 \leq 1\} \\
&= \{(u,v) : \frac{(u-1)^2}{2}+v^2 \leq 1\}.
\end{aligned}
$$

Como $\sigma_u \wedge \sigma_v$ e $\overrightarrow{N}$ verificam $\sigma_u \wedge \sigma_v \cdot \overrightarrow{N} > 0$ e $\overrightarrow{N} \cdot \overrightarrow{k} > 0$, então definimos a mesma orientação.

Logo

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_{D_{u,v}} (u,v,3-2u)\cdot(2,0,1)\;du\,dv = \iint_{D_{u,v}} (2u+3-2u)\,du\,dv \\
&= 3\,A(D_{u,v}) = 3\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}
$$

2ª Questão: (3,0) sejam

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}} + \left(xy^2, yz^2, zx^2\right)$$

e S é a esfera $z^2+y^2+z^2=1$ orientada com normal unitária $\overrightarrow{N}$ exterior à esfera. Calcule $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N}\,d\sigma$.

Solução:

Podemos escrever o campo $\overrightarrow{F}$ como $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, onde $\overrightarrow{F_1} = (xy^2, yz^2, zx^2)$ e $\overrightarrow{F_2} = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Logo $\iint_S \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{N}d\sigma = \iint_S \overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{N}d\sigma + \iint_S \overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{N}d\sigma$.

Vamos calcular a integral $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{N}d\sigma$. O domínio e a divergência do campo $\overrightarrow{F_1}$ são:

$$\text{dom}\overrightarrow{F_1} = \mathbb{R}^3,$$

$$\text{div}\overrightarrow{F_1} = y^2+z^2+x^2.$$

Note que $R = \text{Int}S = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, portanto $R \subset \text{dom } \overrightarrow{F_1}$. Além disso, a normal exterior à esfera e a normal que aponta para o complementar de R são as mesmas.

Utilizando o teorema de Gauss,

$$\iint_S \overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{N}d\sigma = \iiint_R x^2+y^2+z^2\,dx\,dy\,dz.$$

Fazendo uma mudança para coordenadas esféricas, com $x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$ e $z = \rho\cos\phi$, a integral resulta

$$\iint_S \overrightarrow{F_1}\cdot\overrightarrow{N}d\sigma = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = 2\pi\frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi = \frac{4\pi}{5}.$$

Análogamente, para calcular $\displaystyle\iint_S \overrightarrow{F_2}\cdot\overrightarrow{N}d\sigma$ primeiro achamos o domínio do campo $\overrightarrow{F_2}$ e a sua divergência:

$$\text{dom}\overrightarrow{F_2} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\},$$

$$\begin{aligned}
\text{div}\overrightarrow{F_2} &= \frac{1}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3x^2}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{1}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3y^2}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&+ \frac{1}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{12z^2}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{5}{2}}} \\
&= \frac{3}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{3(x^2+y^2+4z^2)}{(x^2+y^2+4z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0.
\end{aligned}$$

Seja $T = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + 4z^2 < 1\}$. Portanto, $T \cap S = \emptyset$.

Seja R a região $R = \text{Ext}T \cap \text{Int}S$. Logo $R \cup \partial R = R \cup S \subset \text{dom}\overrightarrow{F_2}$, porque $0 \in \text{Int}T$.

A normal $\overrightarrow{n_c}$ que aponta para o complementar de R na esfera S é dado por

$$\overrightarrow{n_c} = \overrightarrow{N}$$

e em T por

$$\overrightarrow{n_c} = \overrightarrow{n_i},$$

ou seja, apontando para o $(0, 0, 0)$. Utilizando o teorema de Gauss temos que a integral de superfície para o campo $\overrightarrow{F_2}$ é

$$\iint_S \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma - \iint_{\partial T} \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma = 0,$$

onde ∂T é o bordo de T e o lado direito da equação acima é zero pois $\text{div}\overrightarrow{F_2}$. Concluímos que

$$\iint_S \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma = \iint_{\partial T} \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma = 4\pi.$$

Finalmente, a integral de superfície do campo $\overrightarrow{F}$ é

$$\iint_S \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma = \iint_S \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma + \iint_S \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{N} d\sigma = \frac{24}{5}\pi.$$

3ª Questão: (3,0)

Seja

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = \left(x^7, z + e^{y^2}, cos(z^2) + xy\right)$$

e γ a intersecção do cilindro $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ com o parabolóide $z = x^2 + y^2 - 1$ orientada de forma que sua projeção no plano xy seja pecorrida uma vez no sentido horário. Calcule $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$.

Solução:

Podemos escrever o campo da questão como $\overrightarrow{F} = \left(x^7, e^{y^2}, \cos z^2\right) + (0, z, xy) = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$, onde $\overrightarrow{F_1} = \left(x^7, e^{y^2}, \cos z^2\right)$ e $\overrightarrow{F_2} = (0, z, xy)$.

Vamos calcular a integral $\int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot d\overrightarrow{r}$. O rotacional está dado por

$$\text{rot}\overrightarrow{F_1} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^7 & e^{y^2} & \cos z^2 \end{vmatrix} = (0,0,0).$$

Além disso, temos que $\text{dom}\overrightarrow{F_1} = \mathbb{R}^3$ é simplesmente conexo. Logo $\overrightarrow{F_1}$ é conservativo. Como γ é fechada então $\int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot d\overrightarrow{r} = 0$.

Agora calculamos $\int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot d\overrightarrow{r}$. Uma parametrização para γ é:

$$x = 4\sin t,\ y = 3\cos t,\ z = 16\sin^2 t + 9\cos^2 t - 1;\ t \in [-\pi, \pi].$$

A derivada da curva γ fica

$$\gamma'(t) = (4\cos t, -3\sin t, 32\sin t\cos t - 18\cos t\sin t) = (4\cos t, -3\sin t, 14\sin t\cos t).$$

Logo

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{r} &= -\int_{-\pi}^{\pi} \left(0, 16\sin^2 t + 9\cos^2 t - 1, 12\sin t\cos t\right) \cdot (4\cos t, -3\sin t, 14\sin t\cos t)\, dt \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} -48\sin^3 t - 27\cos^2 t\sin t + 3\sin t + 168\sin^2 t\cos^2 t\, dt.\end{aligned}$$

Como a função $\sin t$ é impar então $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^3 t dt = 0$, $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t \sin t dt = 0$ e $\int_{-\pi}^{\pi} \sin t dt = 0$. Então

$$\begin{aligned}\int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{r} &= -\int_{-\pi}^{\pi} 168\sin^2 t\cos^2 t dt \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} 168\frac{(1-\cos 2t)}{2}\frac{(1+\cos 2t)}{2} dt \\ &= -42\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 2t dt \\ &= -\int_{-\pi}^{\pi} 21(1-\cos 4t) dt \\ &= -42\pi.\end{aligned}$$