Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2a. Prova - 1o. Semestre 2017 - 23/05/2017

Turma A

Questão 1: Calcule $\int_\gamma xy\,ds$, onde γ é dada pela interseção das superfícies $x^2+y^2=1$, $x^2+\frac{z^2}{25}=1$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, percorrida do ponto $(1,0,0)$ ao ponto $(0,1,5)$.

Solução:

Uma parametrização para γ é

$$\gamma(t)=\left(t,\sqrt{1-t^2},5\sqrt{1-t^2}\right)$$

com $t\in[0,1]$, percorrida de $t=1$ para $t=0$.

Assim, $\gamma'(t)=\left(1,\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}},\frac{-5t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$, $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+\frac{26t^2}{1-t^2}}=\sqrt{\frac{1+25t^2}{1-t^2}}$ e a integral fica

$$\int_\gamma xyds=-\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\sqrt{\frac{1+25t^2}{1-t^2}}dt=-\int_0^1 t\sqrt{1+25t^2}dt$$

Para calcular a integral, basta fazer a seguinte mudança de variáveis: seja $u=1+25t^2\to du=50tdt$, então

$$-\int_0^1 t\sqrt{1+25t^2}dt=\frac{1}{50}\int_1^{26}\sqrt{u}du=\frac{1}{75}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{26}=\frac{1}{75}\left(26\sqrt{26}-1\right)$$

Questão 2: Considere o campo

$$\vec{F} = \left(ye^{xy}\sin(yz) + 1, xe^{xy}\sin(yz) + ze^{xy}\cos(yz) - y, ye^{xy}\cos(yz) - z\right).$$

a) Mostre que $\overrightarrow{F}$ é conservativo.

b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ onde $\gamma(t) = (\cos t, 1 + \sin t, \cos(2t))$ e $t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Solução:

a) Para mostrar que $\vec{F}$ é conservativo, vamos achar uma função potencial, que também ajudará a resolver o item b. Supondo que tal função potencial, denotada por φ, exista, ela deve satisfazer

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = ye^{xy}\sin(yz) + 1 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = e^{xy}\sin(yz) + x + f(y,z)$$

onde $f(y,z)$ deve ser determinada. Para tal, temos duas expressões para $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, uma vinda do campo $\vec{F}$ e outra derivando φ parcialmente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xe^{xy}\sin(yz) + ze^{xy}\cos(yz) - y = xe^{xy}\sin(yz) + ze^{xy}\cos(yz) + \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -y \Rightarrow f(y,z) = -\frac{y^2}{2} + g(z)$$

onde $g(z)$ deve ser determinada. Com procedimento análogo para $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = ye^{xy}\cos(yz) - z = ye^{xy}\cos(yz) + \frac{\partial g}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = -z \Rightarrow g(z) = -\frac{z^2}{2} + C$$

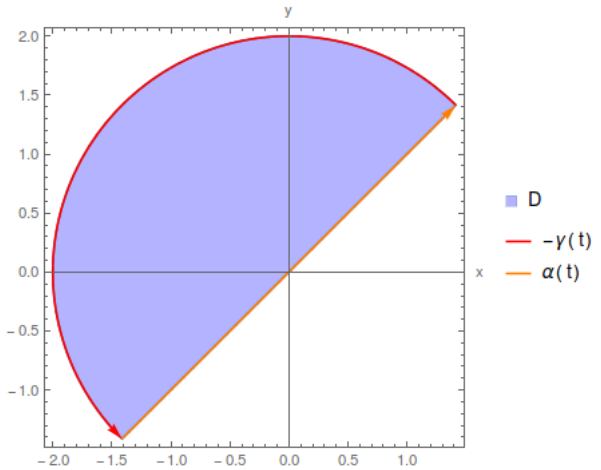
onde C é uma constante qualquer. Portanto, tomando $\varphi(x,y,z) = e^{xy}\sin(yz) + x - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}$, temos que φ é uma função potencial para $\vec{F}$ e, logo, este é conservativo.

b) Um jeito fácil de calcular a integral é utilizar a função potencial encontrada no item a.

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \varphi\left(\gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(0,0,-1) - \varphi(1,1,1) = -\frac{1}{2} - e\sin 1$$

Questão 3: Seja $\vec{F} = \left(-\frac{y^3}{3} - 2ye^{(x-y)}, 2\left(y-1\right)e^{(x-y)} + \frac{x^3}{3} + 1\right)$. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr}$, onde γ é o semi-círculo dado por $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq x$, e percorrido de $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ até $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Solução: O cálculo direto da integral é complicado, por isso, a ideia é usar o Teorema de Green para calculá-la. A figura abaixo ajudará a entender as curvas e domínios que serão definidos.



Seja a curva $\alpha\left(t\right) = \left(t, t\right), t \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ e D a região limitada do plano cuja fronteira é $Im\left(\alpha\right) \bigcup Im\left(\gamma\right)$. O Teorema de Green nos dá

$$\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot \vec{dr} + \int_\alpha \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_D rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA \Rightarrow \int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_\alpha \vec{F} \cdot \vec{dr} - \int_D rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA$$

Vamos calcular as integrais do lado direito separadamente.

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \vec{F}\left(\alpha\left(t\right)\right) \cdot \alpha^{'}\left(t\right) dt = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \vec{F}\left(\alpha\left(t\right)\right) \cdot \alpha^{'}\left(t\right) dt = -\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dt = -2\sqrt{2}$$

$$\int_D rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA = \int_D x^2 + y^2 dxdy = \int_0^2 \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 r d\theta dr = \pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi$$

onde na integral de domínio D foi descrito com coordenadas polares. Assim, a integral pedida é

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_\alpha \vec{F} \cdot \vec{dr} - \int_D rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA = -2\sqrt{2} - 4\pi$$

Questão 4: Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde γ é a fronteira do retângulo $R = [-1, 2] \times [-1, 1]$ percorrida uma vez no sentido anti-horário e $\vec{F} = -\frac{y}{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}}\vec{i} + \frac{x}{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}}\vec{j}$.

Solução:

O cálculo direto da integral parametrizando a fronteira de R é complicado e, portanto, vamos recorrer ao Teorema de Green. Porém note que R contém um ponto em que $\vec{F}$ não está definido, então uma curva auxiliar é construída de modo que esteja contida em R e englobe a singularidade (origem), para assim o Teorema de Green poder ser aplicado. Seja $\alpha(t) = \left(\frac{3}{100}\ \operatorname{sen} t, \frac{5}{100}\cos t\right), t \in [0, 2\pi]$ e A o interior da região limitada por α. O Teorema de Green garante que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{R \setminus A} rot\vec{F} \cdot \vec{k}$$

Porém $rot\vec{F} = 0$, então basta calcular a integral sobre α.

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = -\int_0^{2\pi} 15 dt = -30\pi$$

Logo,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 30\pi$$

Turma B

Questão 1: Calcule $\int_\gamma xy\,ds$, onde γ é dada pela interseção das superfícies $x^2+\frac{y^2}{16}=1$, $x^2+z^2=1$, $y\geq 0$, $z\geq 0$, percorrida do ponto $(1,0,0)$ ao ponto $(0,4,1)$.

Solução:

Uma parametrização para γ é

$$\gamma(t)=\left(t,4\sqrt{1-t^2},\sqrt{1-t^2}\right)$$

com $t\in[0,1]$, percorrida de $t=1$ para $t=0$.

Assim, $\gamma'(t)=\left(1,\frac{-t}{\sqrt{1-t^2}},\frac{-4t}{\sqrt{1-t^2}}\right)$, $\|\gamma'(t)\|=\sqrt{1+\frac{17t^2}{1-t^2}}=\sqrt{\frac{1+16t^2}{1-t^2}}$ e a integral fica

$$\int_\gamma xyds=-\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\sqrt{\frac{1+16t^2}{1-t^2}}dt=-\int_0^1 t\sqrt{16t^2}dt$$

Para calcular a integral, basta fazer a seguinte mudança de variáveis: seja $u=1+16t^2\to du=32tdt$, então

$$-4\int_0^1 t\sqrt{1+16t^2}dt=\frac{-4}{32}\int_1^{17}\sqrt{u}du=\frac{-1}{12}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_1^{17}=\frac{-1}{12}\left(17\sqrt{17}-1\right)$$

Questão 2: Considere o campo

$$\vec{F} = \left(ye^{xy}\sin(yz) + 1, xe^{xy}\sin(yz) + ze^{xy}\cos(yz) - y, ye^{xy}\cos(yz) - z\right).$$

a) Mostre que $\overrightarrow{F}$ é conservativo.

b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ onde $\gamma(t) = (\cos t, 1 + \sin t, \cos(2t))$ e $t \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Solução:

a) Para mostrar que $\vec{F}$ é conservativo, vamos achar uma função potencial, que também ajudará a resolver o item b. Supondo que tal função potencial, denotada por φ, exista, ela deve satisfazer

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = ye^{xy}\sin(yz) + 1 \Rightarrow \varphi(x,y,z) = e^{xy}\sin(yz) + x + f(y,z)$$

onde $f(y,z)$ deve ser determinada. Para tal, temos duas expressões para $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, uma vinda do campo $\vec{F}$ e outra derivando φ parcialmente

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = xe^{xy}\sin(yz) + ze^{xy}\cos(yz) - y = xe^{xy}\sin(yz) + ze^{xy}\cos(yz) + \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = -y \Rightarrow f(y,z) = -\frac{y^2}{2} + g(z)$$

onde $g(z)$ deve ser determinada. Com procedimento análogo para $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = ye^{xy}\cos(yz) - z = ye^{xy}\cos(yz) + \frac{\partial g}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial z} = -z \Rightarrow g(z) = -\frac{z^2}{2} + C$$

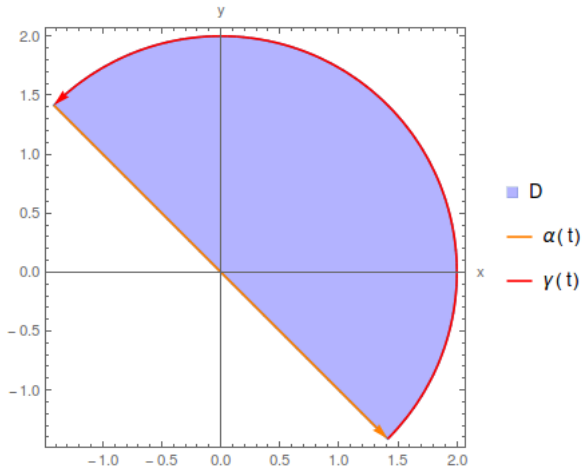
onde C é uma constante qualquer. Portanto, tomando $\varphi(x,y,z) = e^{xy}\sin(yz) + x - \frac{y^2}{2} - \frac{z^2}{2}$, temos que φ é uma função potencial para $\vec{F}$ e, logo, este é conservativo.

b) Um jeito fácil de calcular a integral é utilizar a função potencial encontrada no item a.

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \varphi\left(\gamma\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) - \varphi(\gamma(0)) = \varphi(0,0,-1) - \varphi(1,1,1) = -\frac{1}{2} - e\sin 1$$

Questão 3: Seja $\vec{F} = \left(-\frac{y^3}{3} + 2\left(x+1\right)e^{(x-y)}, 2xe^{(x-y)} + \frac{x^3}{3} + 1\right)$. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr}$, onde γ é o semi-círculo dado por $x^2 + y^2 = 4$, $y \geq -x$, e percorrido de $\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ até $\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$.

Solução: O cálculo direto da integral é complicado, por isso, a ideia é usar o Teorema de Green para calculá-la. A figura abaixo ajudará a entender as curvas e domínios que serão definidos.



Seja a curva $\alpha\left(t\right) = \left(t, t\right), t \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$ e D a região limitada do plano cuja fronteira é $Im\left(\alpha\right) \bigcup Im\left(\gamma\right)$. O Teorema de Green nos dá

$$\int_{-\gamma} \vec{F} \cdot \vec{dr} + \int_\alpha \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_D rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA \Rightarrow \int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_\alpha \vec{F} \cdot \vec{dr} - \int_D rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA$$

Vamos calcular as integrais do lado direito separadamente.

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \vec{F}\left(\alpha\left(t\right)\right) \cdot \alpha^{'}\left(t\right) dt = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \vec{F}\left(\alpha\left(t\right)\right) \cdot \alpha^{'}\left(t\right) dt = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dt = 2\sqrt{2}$$

$$\int_D rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA = \int_D x^2 + y^2 dxdy = \int_0^2 \int_{\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 r d\theta dr = \pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 4\pi$$

onde na integral de domínio D foi descrito com coordenadas polares. Assim, a integral pedida é

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{dr} = \int_\alpha \vec{F} \cdot \vec{dr} - \int_D rot\vec{F} \cdot \vec{k}\, dA = 2\sqrt{2} - 4\pi$$

Questão 4: Calcule $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ onde γ é a fronteira do retângulo $R = [-1, 2] \times [-1, 1]$ percorrida uma vez no sentido anti-horário e $\vec{F} = -\frac{y}{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}}\vec{i} + \frac{x}{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}}\vec{j}$.

Solução:

O cálculo direto da integral parametrizando a fronteira de R é complicado e, portanto, vamos recorrer ao Teorema de Green. Porém note que R contém um ponto em que $\vec{F}$ não está definido, então uma curva auxiliar é construída de modo que esteja contida em R e englobe a singularidade (origem), para assim o Teorema de Green poder ser aplicado. Seja $\alpha(t) = \left(\frac{2}{100}\ \operatorname{sen} t, \frac{4}{100}\cos t\right), t \in [0, 2\pi]$ e A o interior da região limitada por α. O Teorema de Green garante que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{R \setminus A} rot\vec{F} \cdot \vec{k}$$

Porém $rot\vec{F} = 0$, então basta calcular a integral sobre α.

$$\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{0}^{2\pi} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha^{'}(t)\, dt = -\int_{0}^{2\pi} 8dt = -16\pi$$

Logo,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{\alpha} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 16\pi$$