1ª Prova de MAT2455 - Cálculo III
POLI - 18/04/2017
GABARITO PROVA A

1ª Questão - (valor 2.0)
Calcule a seguinte integral iterada

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{\sqrt{1+x^5}}\, dx\, dy.$$

Solução.

A integral iterada acima corresponde à integral dupla $\int\int_D \frac{y}{\sqrt{1+x^5}}\, dx\, dy$ onde D é região dos pontos (x, y) de $\mathbb{R}^2$ que satisfazem as desigualdades:

$$\sqrt{y} \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1.$$

Esta mesma região pode ser escrita como

$$0 \leq y \leq x^2 \quad \text{e} \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Então podemos escrever

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \frac{y}{\sqrt{1+x^5}}\, dx\, dy = \int\int_D \frac{y}{\sqrt{1+x^5}}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{y}{\sqrt{1+x^5}}\, dy\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x^5}}\, dx = \frac{1}{5} \sqrt{1+x^5}\, |_0^1 = \frac{\sqrt{2}-1}{5}.$$

2ª Questão - (valor 2.5) Calcule a área da região plana entre as retas $3y = \sqrt{3}\,x$, $y = \sqrt{3}\,x$ e limitada por $x^2 + y^2 = 2\,x$.

Solução.

Considere as coordenadas polares $x = r\,\cos\theta$ e $y = r\,\sin\theta$. Então, as equações das curvas que limitam a região plana são:

(1) $3\,r\,\sin\,\theta = \sqrt{3}\,r\,\cos\,\theta \Leftrightarrow \theta = \pi/6$;
(2) $r\,\sin\,\theta = \sqrt{3}\,r\,\cos\,\theta \Leftrightarrow \theta = \pi/3$;
(3) $r^2 = 2\,r\,\cos\,\theta \Leftrightarrow r = 2\cos\theta$ e $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Sendo assim, a região pode ser escrita como

$$D_{r\theta} = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 2\,\cos\theta \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\}.$$

Então, como o módulo do determinante do Jacobiano dessa mudança de variável é r, temos:

$$\mathrm{A}(D) = \int\int_D dxdy = \int\int_{D_{r\theta}} r\,drd\theta$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_0^{2\,\cos\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} 2\cos^2\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \Big[\theta + \frac{1}{2}sen2\theta\Big]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\pi}{6}.$$

3ª Questão - (valor 2.5). Calcule o volume do sólido

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 \leqq \frac{1}{3}(x^2 + y^2), x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4, x^2 + y^2 \geqq 1\}$$

Solução.

Em coordenadas esféricas (ρ, θ, ψ):

1) $z^2 \leqq \frac{1}{3}(x^2 + y^2) \Leftrightarrow \rho^2 cos^2\psi \leqq \frac{1}{3}\rho^2 sen^2\psi \Leftrightarrow tan^2\psi \geqq 3 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} \leqq \psi \leqq \frac{2\pi}{3}$.
2) $x^2 + y^2 + z^2 \leqq 4 \Leftrightarrow \rho \leqq 2$.
3) $x^2 + y^2 \geqq 1 \Leftrightarrow \rho^2 sen^2\psi \geqq 1 \Leftrightarrow \rho \geqq \frac{1}{sen\psi}$
4) $\theta \in [0, 2\pi]$

Cálculo do volume

$$V(S) = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \int_{\frac{1}{sen\psi}}^{2} \rho^2 sen\psi d\rho d\psi d\theta = 2\pi \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{8}{3} sen\psi - \frac{1}{3}\frac{1}{sen^2\psi} d\psi.$$

$$= 2\pi \Big[-\frac{8}{3} cos\psi + \frac{1}{3}\frac{cos\psi}{sen\psi} \Big]_{\pi/3}^{2\pi/3} = 2\pi \Big(\frac{8}{3} - \frac{2}{3\sqrt{3}} \Big)$$

4ª Questão - (valor 3.0). Calcule a integral $\int\int\int_S z\,dxdydz$, onde
$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0,\ 2\,y \geq z^2,\ z^2 \geq 4\,x^2 + y^2\}$.

Solução.

Considere as coordenadas cilíndricas
$$x = \frac{r}{2}\cos\theta,\ \ y = r\,\sin\theta\ \ e\ \ z = z,$$
onde $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $z \in \mathbb{R}$. Então o sólido $S = S_{r\theta z}$ esta representado como
$$S_{r\theta z} = \{(r,\theta,z) : r \leq z \leq \sqrt{2\,r\,\sin\theta},\quad 0 \leq r \leq 2\,\sin\theta \quad \text{e} \quad 0 \leq \theta \leq \pi\}.$$
Lembrando que o módulo do determinante do Jacobiano da mudança de variável feita é $r/2$, podemos escrever a seguinte igualdade:
$$\int\int\int_S z\,dxdydz = \int\int\int_{S_{r\theta z}} z\,\frac{r}{2}\,drd\theta dz.$$
Pelo Teorema de Fubini esta última integral é igual a:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\,\sin\theta}\int_r^{\sqrt{2r\,\sin\theta}} z\,r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}(r^2\sin\theta - \frac{r^3}{2})\,drd\theta =$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta\right)\,d\theta.$$
$$= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}\right)\,d\theta = \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\frac{3}{8}\,d\theta = \frac{\pi}{8}.$$