FUJA DE CÁLCULO III – P3

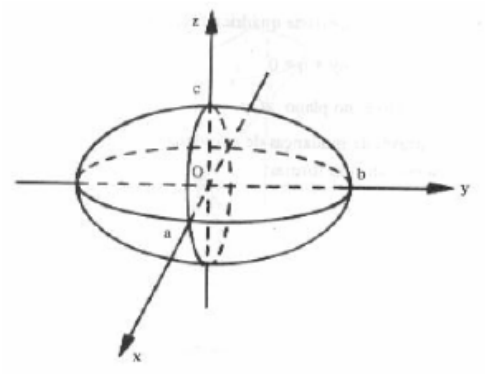
Roteiro/Resumo

REVISÃO QUÁDRICAS:

Alguns alunos me disseram que, por algum motivo, seus professores de cálculo II não passaram as quádricas em aula. Como esse conhecimento é imprescindível para fazer a P3, vou deixar uma revisão aqui no começo.

As quádricas nada mais são do que a extensão das cônicas, mas no R3. São funções que, em geral, devolvem gráficos que se assemelham a superfícies "esféricas". Assim como as cônicas, é importante decorar qual quádrica é qual. Logo abaixo, segue uma lista delas:

Elipsóide:



Centro C(0, 0, 0):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

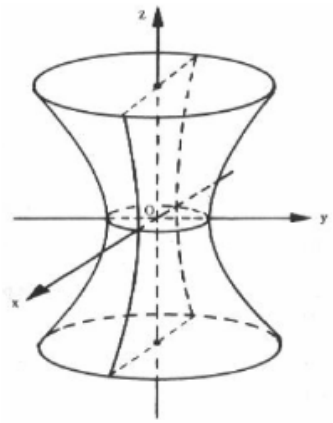
O sinais da equação são positivos.
a, b e c são os eixos das elipses.

Centro C(*h*, *k*, *l*):

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}+\frac{(z-l)^2}{c^2}=1$$

Um famoso caso particular é a esfera, quando a = b = c.

Hiperbolóide de uma folha:



Centro C(0, 0, 0).
Um dos sinais é sempre negativo.

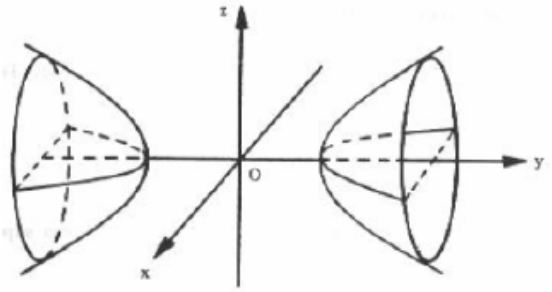
(1) + + - : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

(2) + - + : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

(3) - + + : $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

O sinal negativo é quem diz em torno de qual eixo a figura está.

Hiperbolóide de duas folhas:



Centro C(0, 0, 0).
Dois sinais são sempre negativos.

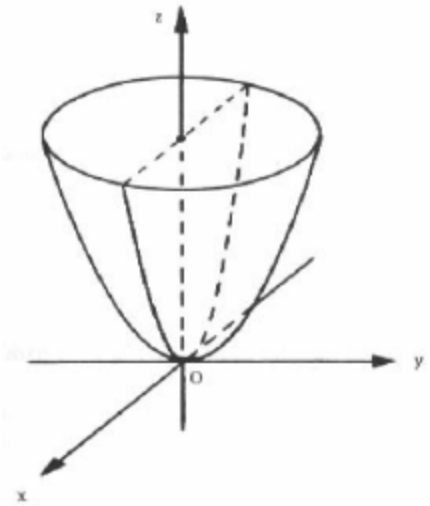
(1) + - - : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(2) - + - : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

(3) - - + : $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Nesse caso, é o sinal positivo quem diz em torno de que eixo a quádrica está.

Parabolóide Elíptico:



Os sinais são iguais.
ax, by, cz

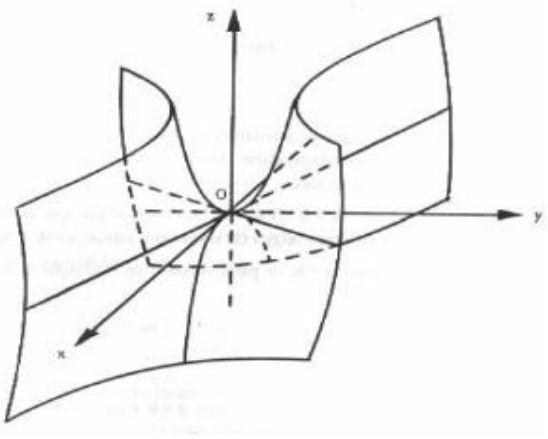
(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz$

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = by$

(3) $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = ax$

O termo no 1º grau é o eixo da figura. “Parábola 3D”.

Parabolóide Hiperbólico (Sela):



Os sinais são contrários.

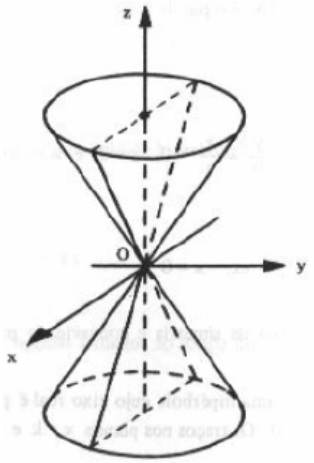
(1) $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = cz$

(2) $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = by$

(3) $\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = ax$

Um pouco incomum em prova, mas vale a revisão.

Superfície Cônica:



Equações semelhantes às do Elipsóide porem igualadas à zero.

O termo de sinal negativo indica o eixo dos cones.

(1) eixo z (fig. ao lado): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

z=0 , a = b, obtém-se uma **superfície cônica circular**. Mas se a ≠ b então obtém-se uma **superfície cônica elíptica**. O mesmo se aplica nas demais equações.

(2) eixo x: $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$

(3) eixo y: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$

Fonte das imagens: Livro de Geometria Analítica - Alfredo Steinbruch, Paulo Winterle

Também existem, e são bem comuns em prova, as superfícies que são criadas a partir do prolongamento de uma função de R em R (retas, parábolas, etc.), sobre um outro eixo, como se a figura no R^2 fosse repetida infinitamente ao longo desse novo eixo. Temos como exemplos mais comuns:

Reta → Plano

Parábola → Calha parabólica

Circunferência → Cilindro

Vale lembrar que esse processo funciona com qualquer função. É possível prolongar exponenciais, logarítmicas, entre outras.

INTEGRAL DE SUPERFÍCIE:

Assim como na P2 aprendemos a fazer integrais de linha, para a P3 temos que saber como fazer integrais de superfície. A aplicação das integrais de superfície geralmente tem a ver com o cálculo do fluxo (de campo elétrico, de água, de fluidos em geral) numa certa área, e por isso tem bastante uso na engenharia.

Também como a integral de linha, ela é dividida em:

Integral de superfície de uma função (e.g.: cálculo da massa)

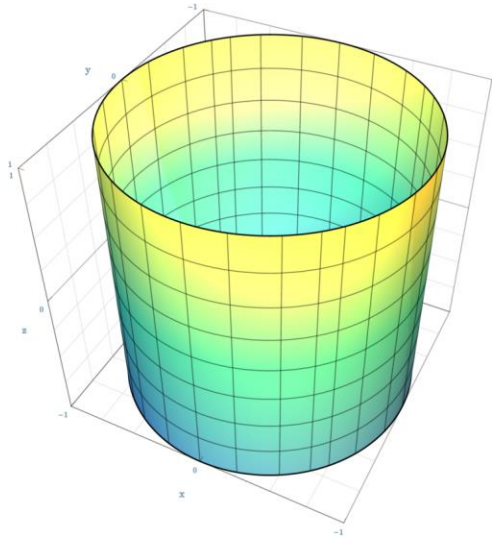
Integral de superfície de um campo vetorial

Como o próprio nome sugere, a integral de superfície é realizada em um plano, ou uma superfície, e corresponde ao pedaço de um gráfico (em geral, o pedaço de uma quádrica). Essa superfície nada mais é que um plano deformado, assim como as curvas gama eram eixos deformados. Como não podemos realizar integrais em "planos deformados", nem em "eixos deformados", nós parametrizamos essas entidades, transformando-as em planos e eixos "retos", onde podemos realizar a integral. Como a parametrização é o mais importante da integral, segue um tópico separado.

PARAMETRIZAÇÃO DE SUPERFÍCIES:

A parametrização de superfícies é feita transformando uma superfície definida por 3 variáveis (ou de 2, mas esse caso é um pouco redundante) em uma definida apenas por 2 variáveis. O segredo para esse processo está justamente neste enunciado. Para parametrizar, basta achar duas variáveis, ou seja, encontrar na superfície duas coisas que estejam variando.

Falando assim pode parecer bem uma dica bem inútil, mas alguns exemplos vão ajudar a visualizar, imaginem um cilindro $x^2 + y^2 = 1$:



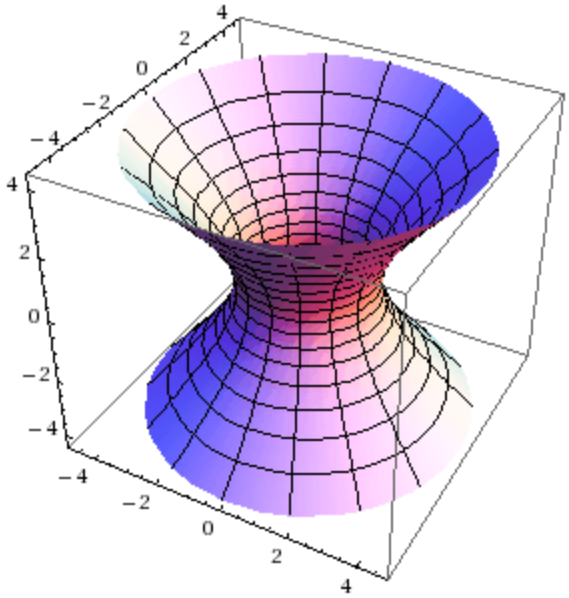
Em uma breve inspeção do cilindro, é possível notar que a altura z é variável, e que o raio é fixo (para fazer esse tipo de inspeção, interseccionem a figura com planos ao longo do eixo dela, nesse caso o z. Isso ajuda a visualizar o que está acontecendo com as intersecções conforme você varia o z. Nesse caso, as intersecções são sempre circunferências de mesmo raio para valores diferentes de z). Se o z é variável, então ele já é uma das novas variáveis. Nesse caso, qual é a outra? Eu preciso de uma variável que consiga, sozinha, descrever a circunferência do cilindro. A melhor variável para isso (e eu já adianto que quase todas as parametrizações de quádricas que aparecem vão usar esta variável) é um ângulo teta.

A parametrização dessa superfície seria a seguinte:

$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \begin{Bmatrix} x = 1.\cos u \\ y = 1.\sin u \\ z = v \end{Bmatrix}$$

Ou seja, z é uma variável livre, e recebe uma das variáveis da parametrização para ele, enquanto x e y podem ser definidos pelo ângulo u de 0 a 2π. Notem que o raio, por ser fixo, já aparece explícito na parametrização.

Porém, existe outro caso, que pode ser descrito pelo seguinte exemplo, imaginem um hiperboloide de uma folha descrito por $x^2 + y^2 - z^2 = 1$:



Se a mesma inspeção realizada antes for feita agora, notaremos que tanto o raio quanto o z variam (as diversas intersecções são circunferências de raios diversos para valores diversos de z). Se o ângulo teta já é uma variável, então qual vai ser a minha outra variável? O raio ou o z? Nesse caso, faz-se com que uma delas dependa da outra. É possível notar pela figura que, conforme z aumenta, o raio da circunferência também aumenta, logo existe uma relação entre eles, basta descobrir qual é.

Tomando a altura z em função do raio temos:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \rightarrow \begin{Bmatrix} x = u.\cos v \\ y = u.\sin v \\ z = \sqrt{u^2 - 1} \end{Bmatrix}$$

OBSERVAÇÃO: Como com qualquer parametrização, há quem prefira "embutir" todas as possíveis transf. de coords. possíveis em uma parametrização só, realizando assim só uma integral, como é o casso acima. Porém, também é possível fazer parametrizações mais simples, e depois realizar as transf. que foram necessárias. Por exemplo, outra parametrização para esta superfície é:

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \rightarrow \begin{Bmatrix} x = u \\ y = v \\ z = \sqrt{u^2 + v^2 - 1} \end{Bmatrix}$$

, porém essa parametrização invariavelmente vai exigir que você use polares em algum momento da integral. Fica a critério de cada um qual processo é melhor. Claro que esses exemplos não levaram em conta os limites de integração, mas depois que se tem a relação entre as variáveis, os limites são simples de serem encontrados.

Bom, depois desse imenso parênteses, voltamos às integrais de superfície. O processo é bem parecido com o da integral de linha. A única diferença é a mudança do jacobiano multiplicando a integral. O que antes era a derivada da curva, agora é a derivada da superfície, e é definida pelo seguinte determinante:

$$\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial S}{\partial u} & \frac{\partial S}{\partial u} & \frac{\partial S}{\partial u} \\ \frac{\partial S}{\partial v} & \frac{\partial S}{\partial v} & \frac{\partial S}{\partial v} \end{vmatrix}$$

, onde S é a parametrização da superfície que você desejar.

Dessa forma, as integrais de superfície, assim como as de linha, seguem o seguinte modelo:

- Integral de uma função:

$$M = \iint_S \delta(S(u,v)). \left\| \frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial u} \right\|$$

, onde $\delta(x,y,z)$ é uma função densidade geralmente, e usa-se o módulo do jacobiano.

- Integral de um campo vetorial:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_K \vec{F}(\sigma(u,v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v du dv$$

, onde a integral se dá pelo produto escalar do jacobiano (nesse caso está escrito com outras letras, mas é a mesma coisa), e o campo com a superfície aplicada nele. Note que para esse produto escalar ocorrer, é necessário um vetor que represente a superfície. Esse vetor é o vetor N. Em se tratando de uma superfície, esse pode estar "saindo" ou "em cima" dela, ou o contrário. Quando uma integral de superfície de campo vetorial for realizada, é importante que os sinais do jacobiano estejam coerentes com os pedidos para N. Por exemplo, se N.k > 0, a parcela k de N é positiva, logo a parcela z do jacobiano também deverá ser positiva. Basta que o sinal do jacobiano seja acertado, por exemplo: (1,1,-1) → (-1,-1,1), e a integral será feita corretamente.

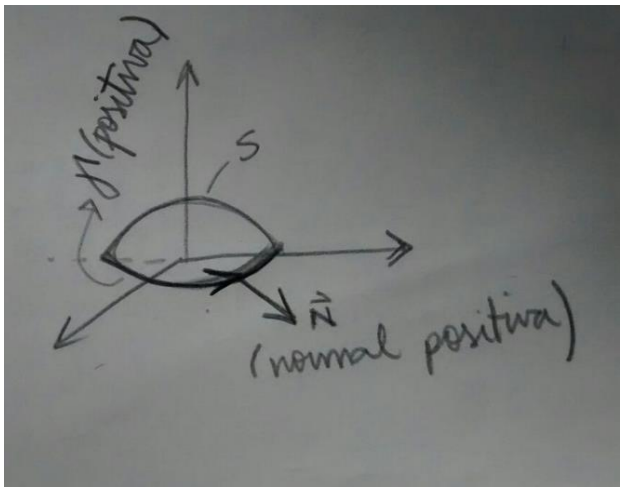
TEOREMA DE STOKES:

O teorema de Stokes nada mais é do que um caso maior do teorema de Green. Quando tínhamos uma integral de linha muito complicada, usávamos Green para descobrir seu valor através da integral da região dentro da curva. Antes essa região era sempre um plano, e por isso sua integral era bem fácil. No Stokes, essa região pode ser toda deformada, porque estamos falando do R^3, ou seja, ela pode ser um pedaço de um cilindro, de uma esfera, de qualquer coisa, e a curva gama sobre a qual deseja-se calcular a integral é o contorno dessa região.

A fórmula de Stokes é a seguinte:

$$\iint_S rot(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{n} dS = \int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r}$$

Notem que é bem parecida com a de Green. O que mudou e o que ficou igual foi: as curvas tinham sinal positivo quando se imaginava um "homenzinho" andando no sentido da curva e a região ficava à esquerda, e isso continua igual. Agora, antes se calculava o rotacional da F e seu valor na parcela k sempre era positivo. Dessa vez não. Essa parcela da esquerda é uma integral de superfície de um campo vetorial e a normal tem um sentido que tem que ser respeitado, como visto na seção anterior. Mas qual é a sentido certo da normal? Isso exige outro esforcinho mental. Lembram do homem que andava sobre a curva? Imaginem a curva contornando a região de forma que ela fique à esquerda, ou seja, de forma que a curva seja positiva. Nesse caso, o homenzinho é a própria normal (como se o sentido da normal fosse dos pés até a cabeça dele). Se utilizada essa normal no cálculo da parcela esquerda, ela será positiva. Caso contrário, negativa.



Nesse caso temos uma superfície S que é uma casca esférica com z > 0, gama é a curva que nesse sentido deixa a região a esquerda, e a normal (que seria o próprio homenzinho) está apontada para fora da superfície. Nesse caso, essa é a normal positiva. A outra normal, que estaria apontando para dentro, é a normal negativa. Não há problema em usar a normal negativa DESDE QUE se ponha um sinal negativo na fórmula de Stokes no decorrer no exercício.

Para descobrir a normal, o processo é o mesmo do da integral de superfície. Parametriza a superfície e calcula o produto vetorial. Para descobrir se a normal que você achou é a positiva ou a negativa basta uma breve inspeção. Se a parcela z da normal, por exemplo, que você achou é negativa, mas o desenho te mostra que a normal positiva aponta para o sentido positivo de z, basta trocar o sinal. Isso mostra a importância do desenho.

TEOREMA DE GAUSS:

Por último, o teorema de Gauss. Ele também é uma "ampliação" do teorema de Stokes, porém com outra problemática. Imaginem que uma integral de superfície seja muito difícil de fazer na unha, então usamos a integral de um volume dentro dessa superfície para achar o valor das integrais das superfícies. Muito parecido com Stokes, certo? O que antes era o contorno de uma superfície definido pela soma das curvas, agora é a casca de um volume definida pela soma das pequenas superfícies que formam essa casca.

A fórmula do teorema de Gauss é:

$$\iiint_D div(\vec{v})\ dxdydz = \iint_{\partial D} \vec{v}.\vec{n}dS$$

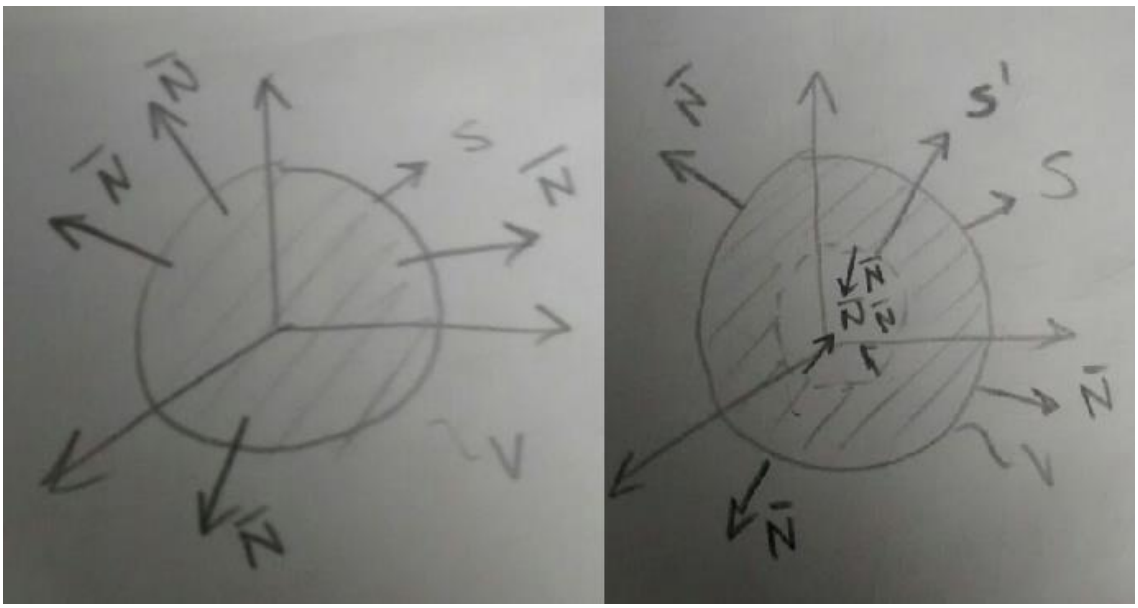
(O v aí, no caso, é um F).

Na parcela à esquerda temos a parte referente ao volume. É uma integral tripla, ou seja, de uma região tridimensional, da função div (F). O divergente (div) é uma das formas com a qual você pode usar o operador nabla e nada mais é do que a soma das derivadas de que cada parcela do campo vetorial, em relação a essa mesma parcela, ou seja:

$$div(\vec{F}) = \frac{\partial Fx}{\partial x} + \frac{\partial Fy}{\partial y} + \frac{\partial Fz}{\partial z}$$

, e, portanto, sempre vai retornar apenas uma função, e não um campo vetorial. Como essa integral também não tem orientação, não precisa ter o sinal acertado, basta realizar a integral.

A parcela da direita diz respeito às somas das superfícies que limitam esse volume. São uma ou mais integrais de superfícies a serem realizadas com o advento que a orientação das normais dessas superfícies SEMPRE deve apontar para fora da região. Essa orientação torna as integrais positivas na fórmula.



Notem que na primeira imagem, o volume é definido apenas por uma superfície, e a normal aponta para fora dessa superfície. Na segunda imagem, a região é definida por duas superfícies. As normais da S apontam para fora da região e para fora do centro do sistema de coordenadas, enquanto que as normais de S' apontam para fora da região, porém para dentro do centro do sistema. O que prevalece é apontar para fora da região, ou seja, nesse caso todas as superfícies estão positivas.

OBS: Como em Green, haviam pontos ou eixos que não podiam ser levados em conta, chamados de singularidades, pois não faziam parte do domínio da função. Essas singularidades continuam valendo para Stokes e para Gauss, e devem ser evitadas.