RESUMO FUJA CÁLCULO 3

- REVISÃO:

· INTEGRAL DE LINHA:

$\int_\gamma \delta(x,y)\,ds \Rightarrow$ Parametrização de γ: $\Rightarrow$ Módulo de γ':

$\downarrow$ função densidade

$\gamma(t) = (f(t), g(t))$ $\qquad$ $\gamma'(t) = (f'(t), g'(t))$

$[a;b]$ $\qquad$ $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}$

$\Rightarrow \int_\gamma \delta(x,y)\,ds = \int_a^b \delta(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt \rightarrow$ cálculo da massa da curva.

- NOVA INTEGRAL DE LINHA:

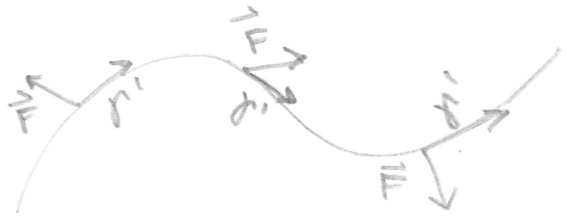
· Além da integral de massa, que é calculada com uma função, no caso a função densidade, a integral de linha também pode ser calculada em um <u>CAMPO VETORIAL</u>.

· Qual a diferença?

O campo vetorial é uma função que pega números e devolve vetores. Imaginem, por exemplo, uma função para a força centrípeta. Para cada ponto onde se encontra a partícula, a função devolve um vetor com o mesmo módulo, apontando para o centro da trajetória.

· O que muda na integral?

O primeiro problema que aparece é: não dá pra integrar um vetor. Por isso se usa o produto escalar.



Através da tangente da curva calcula-se o produto escalar (que é um número) de cada dr. O somatório desses produtos escalares se dá por:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

FUNÇÃO ($f(x,y)$) VS. CAMPO VETORIAL ($\vec{F}(x,y)$)

- parametrizo a $\gamma:[a,b]$
- derivo a $\gamma \Rightarrow \gamma'$
- encontro o módulo $\|\gamma'\|$

$$\int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt$$

- parametrizo a $\gamma:[a,b]$
- derivo a $\gamma \Rightarrow \gamma'$
- NÃO encontro o módulo $\|\gamma'\|$

$$\int_a^b F(\gamma(t)).(\gamma'(t))\,dt$$

↳ produto escalar

- CAMPOS CONSERVATIVOS

· Existem alguns campos vetoriais com uma certa particularidade. Eles só dependem do ponto inicial e do final. Conhecemos diversos exemplos de campos conservativos:

· força peso ⇒ energia potencial gravitacional
· força elástica ⇒ " " elástica
· etc

· Como eles são importantes na engenharia, temos que estudá-lo

· Existem algumas relações matemáticas que nos ajudam a determinar se um campo é conservativo ou não:

- existe a ϕ:

Se existe uma $\phi(x,y)$ tal que:

$$\left.\begin{array}{l} P(x,y) = \partial\phi/\partial x \\ Q(x,y) = \partial\phi/\partial y \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{F}(x,y) = (P(x,y); Q(x,y))$$

, ou seja, a parcela $\underline{x}$ da $\vec{F}$ é a derivada $\underline{x}$ da ϕ e sucessivamente

$\Rightarrow \vec{F}(x,y)$ é um campo conservativo

(Detalhe importante: isso vale para mais variáveis)

- se $\vec{F}(x,y)$ é conservativo $\Rightarrow \text{rot}\,\vec{F} = 0$:

(revisão: $\text{rot}\,\vec{F} = ?$ ⇒ produto vetorial $\nabla \times \vec{F}$

$$\text{rot}\,\vec{F}.\vec{K} = \begin{vmatrix} \partial/\partial x & \partial/\partial y \\ \vec{P} & \vec{Q} \end{vmatrix} = \frac{\partial \vec{Q}}{\partial x} - \frac{\partial \vec{P}}{\partial y}\,;\ \text{rot}\,\vec{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$
)

IMPORTANTE! SE $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \not\Rightarrow \vec{F}$ é conservativo

- Única exceção: quando o domínio de $\vec{F}$ for simplesmente conexo. Ex.: $\mathbb{R}^n$

$\text{rot}\,\vec{F}$ E $D(\vec{F})$ simplesmente conexo $\Rightarrow \vec{F}$ é conservativo

$\Rightarrow$ Se $\vec{F}$ é conservativo:

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r},\ \text{com } \gamma\ [a,b] = \underbrace{\phi(b)}_{\text{ponto final}} - \underbrace{\phi(a)}_{\text{ponto inicial}}$$

- independe da gama
- depende dos pontos

- TEOREMA DE GREEN:

Imagine resolver uma integral de linha com uma $\vec{F}(x,y)$ complicada em uma $\gamma(t)$ pior ainda?

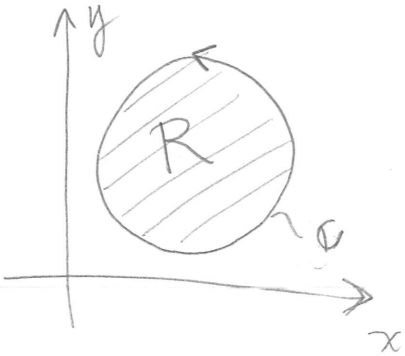
Ex.: $\vec{F}(x,y) = \left(\ln^2\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right); e^{y\,\text{sen}\,x^3}\right)$ e $\gamma(t) = \left(\frac{1+t^2}{\sqrt{t}}; \text{sen}^3(t)\right)$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int \left(\ln^2 \frac{1}{\sqrt{\frac{1+t^2}{\sqrt{t}}}};\ e^{\text{sen}^3 t\,\text{sen}\left(\frac{1+t^2}{\sqrt{t}}\right)^3}\right)\cdot(\gamma'(t))\,dt$$

→ nem achar a derivada eu sei ☹

E se usassemos outro método?

O teorema de Green nos possibilita resolver essa integral de maneira mais fácil:



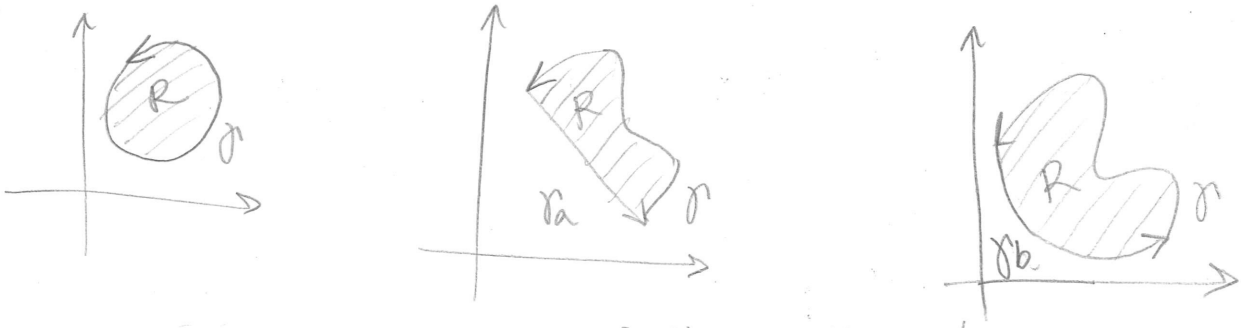
Seja R a região fechada representada no gráfico e C seu contorno:

POR GREEN: $\iint_R \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{k}\,dR = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, ou seja a integral dupla da região R é igual à integral de linha sobre a curva que contorna a região R. Em diversos casos $\iint_R \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{k}\,dR$ é mais fácil de calcular que $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, por isso utiliza-se Green.

Para usar Green, existem algumas observações:

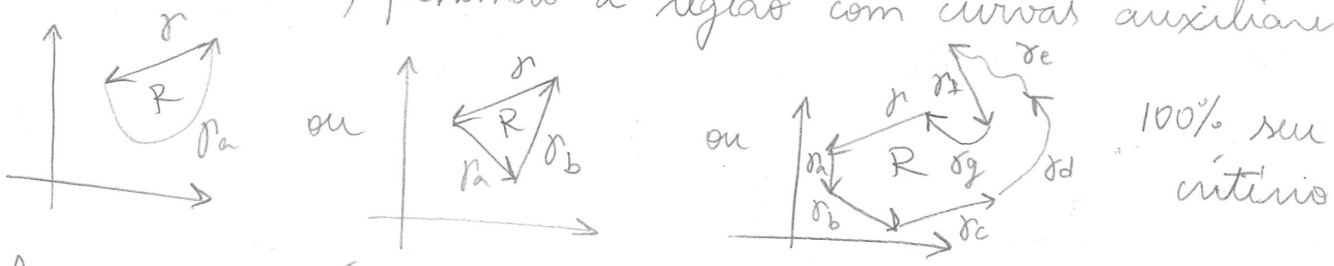
- a escolha da região R é arbitrária, porém R <u>DEVE</u> ser fechada. Algumas R's são implícitas, outras não.

Ex.:



- mesmas γ's, R's diferentes

· O que são γ_a e γ_b? São curvas auxiliares! Quando a própria γ não fecha, você deve encontrar um R fechada que seja mais conveniente, fechando a região com curvas auxiliares:



100% seu critério

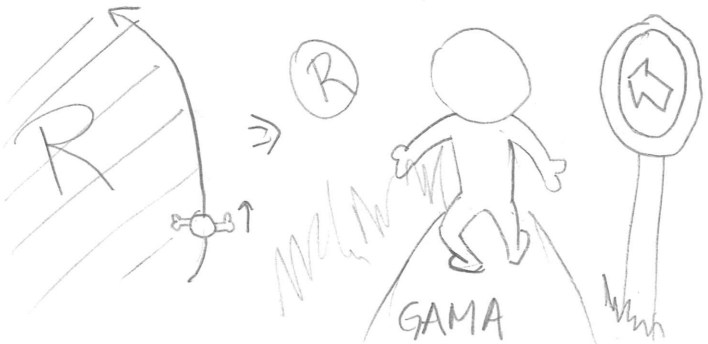
O que muda é:

$$\iint_R \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{k}\,dR = \underbrace{\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{quero}} + \underbrace{\overbrace{\int_{\gamma_a} \vec{F}\cdot dr + \int_{\gamma_b} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_c} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_d} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \ldots}^{\text{soma dos contornos de } R}}_{\text{devo calcular}}$$

devo calcular

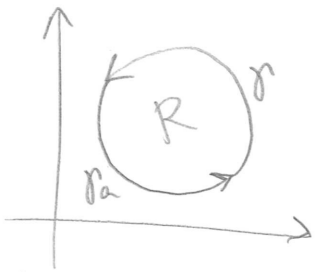
, ou seja, escolha sabiamente!

OBS: os sinais dessas integrais mudam e isso depende do sentido da curva. A regra mais prática é: imagine ser um homenzinho andando sobre a curva, no mesmo sentido que ela. Se a região estiver a sua esquerda, a parcela é positiva, caso contrário, negativa.

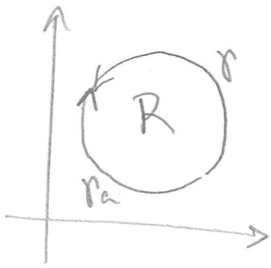


⇒ POSITIVO

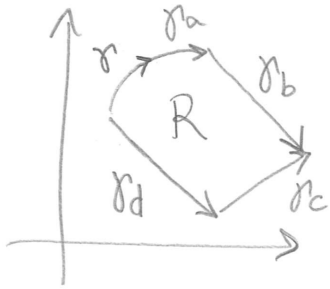
Ex.:



$+\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_a} \vec{F}\cdot dr$



$+\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_a} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

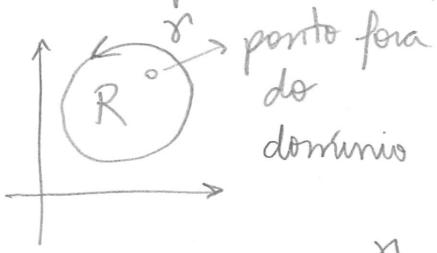


$-\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_a} \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_b} \vec{F}\cdot d\vec{r}$
$+\int_{\gamma_c} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_d} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

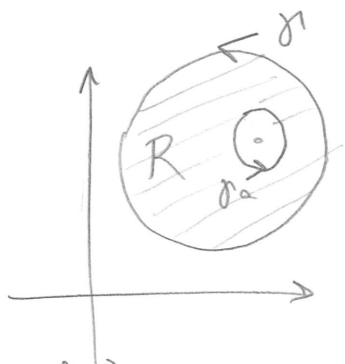
⇒ O jeito mais fácil de não errar o sinal é:
- defino a R
- defino as curvas auxiliares
- mantenho a integral de R sempre positivo e aceito as outras

$$+\iint_R \text{rot}\,\vec{F}\cdot d\vec{r} = \pm\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} \pm \int_{\gamma_a} \vec{F}\cdot d\vec{r} \pm \int_{\gamma_b} \vec{F}\cdot d\vec{r} \pm \dots$$

- R não pode conter <u>vazios</u>:



⇒ deve-se envolver esse ponto com outra γ, a fim de tirá-lo da região R.
Normalmente, usa-se circunferências / elipses:



$+\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_a} \vec{F}\cdot d\vec{r}$

$+\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_a} \vec{F}\cdot d\vec{r}$