Quando o intervalo é curvado

→ faço mudança de variáveis

ex: $\iint_D \frac{x+y-1}{(x+y+1)^4}\,dx\,dy$, sendo D a região do plano limitada

por: $x+y-1=x-y+1$, $x+y-1=2(x-y+1)$, $x-y+1=1$, $x-y+1=2$

fazendo mud. de variáveis (intervalo)

$$\begin{cases} x+y-1=u \\ x-y+1=v \end{cases} \quad (*)$$

Determino o intervalo de u e v com D

$x+y-1=x-y+1$	$x+y-1=2(x-y+1)$	$x-y+1=1$	$x-y+1=2$
$u=v$	$u=2\cdot v$	$v=1$	$v=2$

ou seja

$v \leq u \leq 2v$ e $1 \leq v \leq 2$

$$(*)\begin{cases} x+y-1=u & ① \\ x-y+1=v & ② \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{u+v}{2} \\ y=\frac{u-v}{2}+1 \end{cases} \quad ①+②$$

$$j = \begin{array}{c|cc} & u & v \\ \hline x & \frac{dx}{du} & \frac{dx}{dv} \\ y & \frac{dy}{du} & \frac{dy}{dv} \end{array} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{2} \Rightarrow |j|=\frac{1}{2}$$

$$f(x,y)=\frac{x+y-1}{(x+y+1)^4}$$

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_{uv}} f(u,v)\cdot|j|\,du\,dv$$

$f(u,v) = \frac{u}{v^4}$ $\quad v=[1,2]$ $\quad u=[v,2v]$

$$\iint f(u,v)\cdot |j|\,du\,dv = \int_1^2\int_v^{2v} \frac{u}{v^4}\cdot\frac{1}{2}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{u^2}{2v^4}\Big|_v^{2v} dv = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{4v^2-v^2}{v^4}\,dv$$

$$= \frac{3}{4}\int_1^2 \frac{1}{v^2}\,dv = \frac{3}{4}\,\frac{v^{-1}}{-1}\Big|_1^2 = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{3}{8}$$

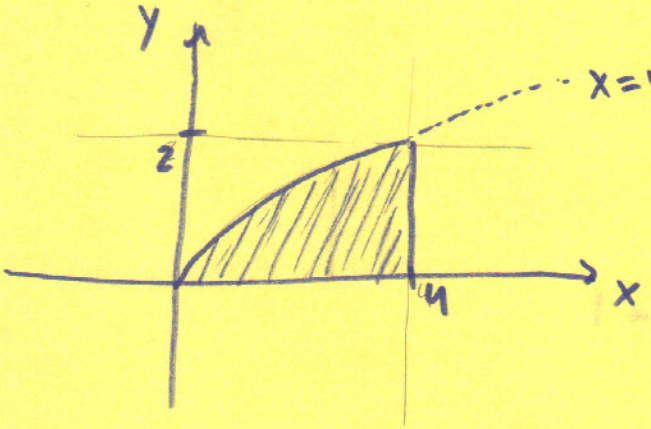
Inverter ordem de integração

$dx\,dy \longrightarrow dy\,dx$

→ desenho o domínio e a partir disso determino o interva

ex: inverter a ordem de integração de $\int_0^2\int_{y^2}^4 y\,\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx\,dy$

$dx\,dy$ $\quad x=[y^2,4]$ e $y=[0,2]$



$x=y^2 \Rightarrow y=\sqrt{x}$

$\Longrightarrow$ $x=[0,4]$, $y=[0,\sqrt{x}]$ $\quad dy\,dx$

$$\int_0^2\int_{y^2}^4 y\,\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dx\,dy = \int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} y\,\frac{\ln(1+x^2)}{1+x^2}\,dy\,dx$$

2D Massa da curva (o exercício fornece a densidade)

$$M = \int_\gamma \delta(x,y,z)\, ds$$ ← integrada em relação à parametrização da curva

δ ← densidade

ex: Calcule a massa da curva cujo traço é a parte da elipse $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ no primeiro quadrante com densidade $\delta(x,y) = xy$

γ é parametrização de $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ (ou seja da curva)

$$\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \implies \gamma: \begin{cases} x(t) = \sqrt{3}\cos t \\ y(t) = 2\,\text{sen}\, t \end{cases} \quad t : [0, \pi/2]$$

pq está no 1º quadrante

Mas

$$M = \int_\gamma \delta(x,y,z)\, ds = \int_{t_1}^{t_f} \delta(\gamma(t)) \cdot \|\gamma'(t)\|\, dt \quad (*)$$

$\gamma(t) = (\sqrt{3}\cos t, 2\,\text{sen}\, t)$

$\gamma'(t) = (-\sqrt{3}\,\text{sen}\, t, 2\cos t)$

$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-\sqrt{3}\,\text{sen}\, t)^2 + (2\cos t)^2} = \sqrt{1 + \cos^2 t}$

$\gamma(x,y) = xy$

$\delta(\gamma) = 2\sqrt{3}\cos t\,\text{sen}$

$$(*)\quad M = \int_0^{\pi/2} 2\sqrt{3}\cos t \cdot \text{sen}\, t \cdot \sqrt{1 + \cos^2 t}\, dt$$

resolver contas

3D <u>Massa do sólido</u> ($\delta(x,y,z)$ dado)

se for uma esfera

↳ coordenadas esféricas

ex: Calcule a massa que é parte da bola $x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4$ acima do cone $z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)}$ e abaixo do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, com densidade $\delta(x,y,z)=z$

$$M = \iiint_{D_{xyz}} \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

faço mudança de coordenadas

$$\gamma \begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad j = \rho^2 \operatorname{sen}\varphi$$

Para descobrir os intervalos de ρ, θ e φ, substituo γ nas equações dadas pelo enunciado.

$$x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4 \Rightarrow (\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta)^2 + (\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta)^2 + (\rho\cos\varphi - 2)^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow \rho = 4\cos\varphi$$

$$z=\sqrt{\frac{1}{3}(x^2+y^2)} \Rightarrow \rho\cos\varphi = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(\rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta)^2 + (\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta)^2\right]}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \sqrt{(\rho \operatorname{sen}\varphi\cos\theta)^2 + (\rho \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta)^2} = \rho\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$D_{\theta\varphi\rho} = 0 \le \theta \le 2\pi \,,\ \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \pi/3 \,,\ 0 \le \rho \le 4\cos\varphi$

Agora calculo a integral (não esqueça o jacobiano!)

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x,y,z\, dx\, dy\, dz = \iiint_{D_{\theta\varphi\rho}} f(\varphi,\theta,\rho)\cdot j\, d\varphi\, d\theta\, d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/4}^{\pi/3}\int_0^{4\cos\varphi} \rho\cos\varphi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

<u>Cálculo da integral quando γ é interseção de superfícies</u> (curva)

Uso a equação das superfícies p/ isolar x, y, z, assim acho parametrização. $\gamma(t)$.

$$\int_\gamma F(x,y,z) = \int_\gamma F(\gamma(t))\cdot \gamma'(t)\, dt$$

ex: Calcule $\int_\gamma e^z\, dx + xz\, dy + zy\, dz$, sendo γ a curva dada pela interseção das superfícies $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e $y + x = 2$, percorrida de $(1,1,-1)$ a $(1,1,1)$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ y + x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + z^2 = 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x^2 - (2-x)^2 + z^2 = 1 \\ 4x + z^2 = 5 \\ x = \frac{5 - z^2}{4} \end{array}$$

$$\gamma(t): \begin{cases} x = \frac{5 - t^2}{4} \\ z = t \\ y = 2 - \frac{5 - t^2}{4} = \frac{3 + t^2}{4} \end{cases}$$

$$\gamma(t) = \left(\frac{5 - t^2}{4}, \frac{3 + t^2}{4}, t\right)$$

$t = [-1, 1]$

Agora calculando a integral

$$\int_{\gamma} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$F(x,y,z) = (e^z, xz, zy)$

$F(\gamma(t)) = \left(e^t, \frac{5t-t^3}{4}, \frac{3t+t^3}{4}\right)$

$\gamma'(t) = \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, 1\right)$

$$= \int_{-1}^{1} \left(e^t, \frac{5t-t^3}{4}, \frac{3t+t^3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, 1\right) dt$$

$$= \frac{11}{30} - \frac{1}{e}$$

Campo Conservativo?

→ $\vec{F}$ é conservativo se seu domínio é simplesmente conexo e $\text{rot}\,\vec{F} = 0$.

ex: $\vec{F}(x,y) = (\underbrace{y^2 - 2xy}_{P}, \underbrace{\frac{2y}{y^2+1} - x^2 + 2xy}_{Q})$

Domínio de $\vec{F}$: $\mathbb{R}^2$ e é simplesmente conexo

não há problema com o domínio
ex: $\frac{1}{y}$ $y \neq 0$
problema

$$\text{rot}\,F = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = -2x + 2y - (2y - 2x) = 0$$

→ Se o campo é conservativo, existe uma função ϕ potencial tal que $\nabla\phi = F$

$$\frac{d\phi}{dx} = y^2 - 2xy \Rightarrow \phi = \int y^2 - 2xy\, dx = y^2x - x^2y + h(y)$$

$$\frac{d\phi}{dy} = 2yx - x^2 + h'(y) = \frac{2y}{y^2+1} - x^2 + 2xy$$

$$\Rightarrow h'(y) = \frac{2y}{y^2+1}$$

$$h(y) = \ln(y^2+1)$$

$$\phi = y^2x - x^2y + \ln(y^2+1)$$

Pra que serve o potencial ϕ?

ex: sendo $\bar{F}$ (igual ao exemplo anterior)

Calcule $\int_\alpha \bar{F} d\bar{r}$, para α a curva dada por $\alpha(t) = (t^2 - t, \sqrt{e^{t^2} - 1})$

$0 \leq t \leq 1$

$\alpha(0) = (0,0)$

$\alpha(1) = (0, \sqrt{e-1})$

usando o potencial

$$\int_\alpha \bar{F} d\bar{r} = -\phi(0,0) + \phi(0, \sqrt{e-1}) = 1 - 0 = 1$$

Teorema de Green

→ se é região fechada $\int_\gamma \bar{F} d\bar{r} = \iint_{D_{xy}} \text{rot } F \, dx dy$

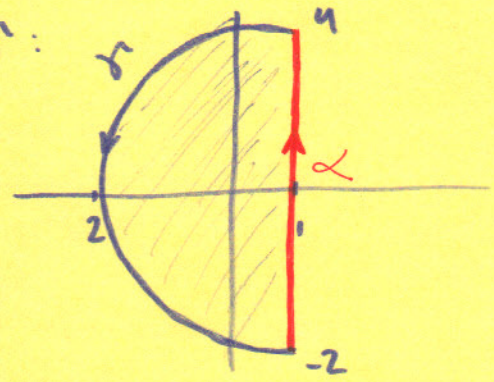
quero usar, mas não é fechada?

↳ fecha a região com uma curva auxiliar, lembrando que o sentido da curva é aquele em que o domínio fica à esquerda.

ex: Calcule $\int_\gamma (\text{sen}(x^2) - y^2) dx + (xy + y^3) dy$ para γ a curva dada por $x^2 - 2x + y^2 - 2y = 7$ com $x \leq 1$ percorrida no sentido anti horário.

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 9$

γ:



fecho a curva com α

$\alpha = (1, t) \quad t: [-2, 4]$

Assim aplicando o to de Green

$$\int_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r} + \int_{\alpha} \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_{D_{xy}} \text{rot}\, \vec{F}\, dx\, dy$$

$$\text{rot}\, \vec{F} = y + 2y = 3y$$

usando coordenadas polares

$x = r\cos\theta + 1$ | $\theta : [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$y = r\,\text{sen}\,\theta + 1$

$j = r$ | $r : [0, 3]$

$$\iint_{D_{xy}} \text{rot}\, \vec{F}\, dx\, dy = \iint_{D_{xy}} 3y\, dx\, dy = \iint_{D_{\theta r}} 3(r\,\text{sen}\,\theta + 1) \cdot r\, dr\, d\theta = \frac{27\pi}{2}$$

Agora calculo a curva auxiliar

$$\int_{\alpha} \vec{F}\, dr = \int F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt$$

$\alpha(t) = (1, t)$

$\alpha'(t) = (0, 1)$

$t : [-2, 4]$

$\vec{F} = (\text{sen}(x^2) - y^2,\ xy + y^3)$

$\vec{F}(\alpha(t)) = (\text{sen}\, 1 - t^2,\ t + t^3)$

$$\int_{-2}^{4} (\text{sen}\, 1 - t^2, t + t^3)(0, 1)\, dt = \int_{-2}^{4} t + t^3\, dt = 66$$

$$\therefore \int_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = \frac{27\pi}{2} - 66$$