Prova Substitutiva de MAT2455 - Cálculo III - POLI - 04/07/2006

Resolução

Questão 1. (3,0 pontos)

a) Calcule $\displaystyle\int_\gamma yz\,ds$, onde γ é a intersecção do elipsóide $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+4z^2=1$ com o plano $y=2x$ contida no primeiro octante.

b) Seja $\gamma(t)=(e^{t^2}\ln(t+1), t^3-1, 5t-5)$, $t\in[0,1]$. Calcule

$$\int_\gamma \left(y^3\cos x+3x^2z+1\right)dx+\left(3y^2\operatorname{sen}x+z\right)dy+\left(x^3+y\right)dz.$$

Solução. a) Vamos primeiro determinar uma parametrização para a curva γ. Eliminando a variável y nas equações que definem γ, obtemos a projeção γ_1 de γ no plano xz. Agora, γ_1 é a curva $\frac{x^2}{4}+x^2+4z^2=1$, que é a elipse $\frac{5x^2}{4}+4z^2=1$. Portanto, uma parametrização de γ é $\gamma(t)=(\frac{2}{\sqrt5}\cos t, \frac{4}{\sqrt5}\cos t, \frac12\sin t)$. Como γ está contida no primeiro octante, devemos ter $x\geq 0$, $y\geq 0$ e $z\geq 0$, o que implica que $0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$. Logo, uma parametrização para γ é

$$\gamma(t)=\left(\frac{2}{\sqrt5}\cos t, \frac{4}{\sqrt5}\cos t, \frac12\sin t\right),\qquad 0\leq t\leq\frac{\pi}{2}.$$

Assim,

$$\gamma'(t)=\left(-\frac{2}{\sqrt5}\sin t, -\frac{4}{\sqrt5}\sin t, \frac12\cos t\right),$$

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{(\frac45+\frac{16}{5})\sin^2 t+\frac14\cos^2 t}=\frac12\sqrt{1+15\sin^2 t},$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\int_\gamma yz\,ds &= \int_0^{\pi/2}\frac{2}{\sqrt5}\sin t\cos t\frac12\sqrt{1+15\sin^2 t}\,dt=\frac{1}{\sqrt5}\frac{1}{30}\frac23(1+15\sin^2 t)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2}\\ &=\frac{1}{45\sqrt5}[4^3-1]=\frac{63}{45\sqrt5}=\frac{7}{5\sqrt5}.\end{aligned}$$

b) Como $\vec F$ é um campo de classe C^∞ definido em todo $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto simplesmente conexo e

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\vec F &= \begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^3\cos x+3x^2z & 3y^2\sin x+z & x^3+y\end{vmatrix}\\ &=(1-1)\vec i-(3x^2-3x^2)\vec j+(3y^2\cos x-3y^2\cos x)\vec k=\vec 0,\end{aligned}$$

então $\vec F$ é um campo conservativo. Portanto, existe uma função $\Phi:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\nabla\Phi(x,y,z)=\vec F(x,y,z)$, para todo $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ e

$$\int_\gamma \vec F\cdot d\vec r=\Phi(\gamma(1))-\Phi(\gamma(0)).$$

Para determinar Φ, devemos resolver o sistema

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = y^3 \cos x + 3x^2 z + 1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 3y^2 \sin x + z \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = x^3 + y \quad (3).$$

Integrando a equação (1) com relação a x, obtemos

$$\Phi(x, y, z) = y^3 \sin x + x^3 z + x + c(y, z),$$

onde $c(y, z)$ é uma função independente de x. Substituindo na equação (2), obtemos

$$3y^2 \sin x + \frac{\partial c}{\partial y} = 3y^2 \sin x + z$$

e, portanto, $c(y, z) = yz + c_1(z)$, onde c_1 só depende de z. Assim, $\Phi(x, y, z) = y^3 \sin x + x^3 z + x + yz + c_1(z)$; substituindo na última equação, obtemos finalmente $x^3 + y + c_1'(z) = x^3 + y$, isto é, $c_1(z) =$ constante. Portanto, um potencial para $\vec{F}$ é a função

$$\Phi(x, y, z) = y^3 \sin x + x^3 z + x + yz$$

e, portanto

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \Phi(\gamma(1)) - \Phi(\gamma(0)) = \Phi(e \ln 2, 0, 0) - \Phi(0, -1, -5) = e \ln 2 - 5.$$

Questão 2. (3,5 pontos) Seja S a parte do parabolóide $z = \frac{7}{4} - x^2 - y^2$ contida no semi-espaço $z \geq x - 1$, orientada de modo que sua normal unitária $\vec{N}$ satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} \geq 0$. Calcule $\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\sigma$, onde

$$\vec{F}(x, y, z) = (-3x - 2y)\vec{i} + (ze^{x^2} + 2y)\vec{j} + (2z - x)\vec{k}.$$

Solução. Vamos primeiro "fechar" a superfície S com a superfície T de modo que a reunião $S \cup T$ seja uma superfície lisa por partes, fechada e orientada segundo a normal unitária exterior. Para isso, usamos a parte do plano $z = x - 1$ que "está dentro" do parabolóide $z = \frac{7}{4} - x^2 - y^2$, orientado com a normal $\vec{N}_T = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$. Seja R a região limitada por $S \cup T$. Pelo Teorema de Gauss, temos

$$\iint\limits_{S \cup T} \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\sigma = \iiint\limits_R \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z)\, dxdydz$$

e portanto, $\iint\limits_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\sigma = \iiint\limits_R \operatorname{div} \vec{F}(x, y, z)\, dxdydz - \iint\limits_T \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\sigma.$

Aos cálculos: seja D a região do plano $\mathbb{R}^2$ cuja fronteira ∂D é a projeção da curva intersecção do parabolóide com o plano; então ∂D é a curva $\frac{7}{4} - x^2 - y^2 = x - 1$, isto é, a circunferência $(x+\frac{1}{2})^2 + y^2 = 3$ de centro $(-\frac{1}{2}, 0)$ e raio $\sqrt{3}$. Então, a superfície T e a região R podem ser descritas, respectivamente por:

$$T : \sigma(u,v) = (u, v, u-1), \qquad (u,v) \in D = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (u + \frac{1}{2})^2 + v^2 \leq 3\}$$

e

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D \text{ e } x - 1 \leq z \leq \frac{7}{4} - x^2 - y^2\}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_T \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\sigma &= \iint_D \vec{F}(\sigma(u,v)) \cdot \vec{N}(\sigma(u,v)) \| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}(u,v) \| \, dudv \\
&= \iint_D \frac{1}{\sqrt{2}}[-3u - 2v - 2(u-1) + u]\sqrt{2}\, dudv = -2 \iint_D [2u + v - 1]\, dudv \\
&= -2 \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_0^{2\pi} [2(-\frac{1}{2} + r\cos\theta) + r\sin\theta - 1] r\, d\theta = 8\pi \int_0^{\sqrt{3}} r\, dr = 12\pi,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\iiint_R \operatorname{div}\vec{F}(x,y,z)\, dxdydz &= \iint_D \left[\int_{x-1}^{\frac{7}{4}-x^2-y^2} 1 dz \right] dxdy = \iint_D \left[\frac{7}{4} - x^2 - y^2 - x + 1 \right] dxdy \\
&= \iint_D \left[3 - (x + \frac{1}{2})^2 - y^2 \right] dxdy = \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_0^{2\pi} [3 - r^2] r\, d\theta = \frac{9\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, d\sigma = \frac{9\pi}{2} - 12\pi = -\frac{15\pi}{2}.$$

Questão 3. (3,5 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{2x^2 + 3y^2}, \frac{x}{2x^2 + 3y^2}, \frac{e^{z^4}}{1 + z^2} \right)$$

e γ é a intersecção do cilindro $2x^2 + 3y^2 = 1$ com o plano $x + y + z = 0$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez em sentido anti-horário.

Solução. O campo $\vec{F}$ não está definido nos pontos do eixo z. Entretanto, o rotacional de $\vec{F}$ é $\vec{0}$:

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{-y}{2x^2 + 3y^2} & \dfrac{x}{2x^2 + 3y^2} & \dfrac{e^{z^4}}{1 + z^2} \end{vmatrix} \\
&= 0\vec{i} - 0\vec{j} + \left(\frac{2x^2 + 3y^2 - 4x^2}{(2x^2 + y^2)^2} + \frac{2x^2 + 3y^2 - 6y^2}{(2x^2 + y^2)^2} \right) \vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Considere a superfície S dada pela porção do cilindro $2x^2+3y^2=1$ entre os planos $x+y+z=0$ e $z=100$, orientada segundo a normal unitária $\vec{N}(x,y,z)=(2x,2y,0)/\sqrt{4x^2+4y^2}$. Pelo Teorema de Stokes, temos

$$\iint_S \text{rot } \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r},$$

onde γ_1 é a intersecção do cilindro $2x^2+3y^2=1$ com o plano $z=100$. Como rot $\vec{F}=\vec{0}$, obtemos

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Agora, γ_1 é uma elipse contida no plano $z=100$, orientada de modo que sua projeção no plano xy é percorrida uma vez no sentido horário; logo uma parametrização de γ_1 é

$$\gamma_1(t) = \left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, 100\right), \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Portanto,

$$\int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{-\cos t}{\sqrt{3}}\frac{\cos t}{\sqrt{2}} + \frac{\sin t}{\sqrt{2}}(-\frac{\sin t}{\sqrt{3}}) + \frac{e^{100^4}}{1+100^2}\cdot 0\right] dt = -\frac{2\pi}{\sqrt{6}}.$$

Logo,

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}.$$