MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
Escola Politécnica - 3ª Prova - 21/06/2016

Turma A
1ª Questão:

a) (1,5) Seja S parte do plano $x + 3y + 2z = 8$ limitada pelos plano $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS$ onde $\vec{F}(x, y, z) = (xyz, y^2z, xy)$ com $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$.

b) (2,0) Seja S parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Calcule a massa de S sendo $\delta\,(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Solução:

a) Para resolver o problema, primeiro parametrizamos a superfície S:

$$\sigma(y, z) = (8 - 3y - 2z, y, z), (y, z) \in R$$

Sendo R a projeção de S no plano yz.

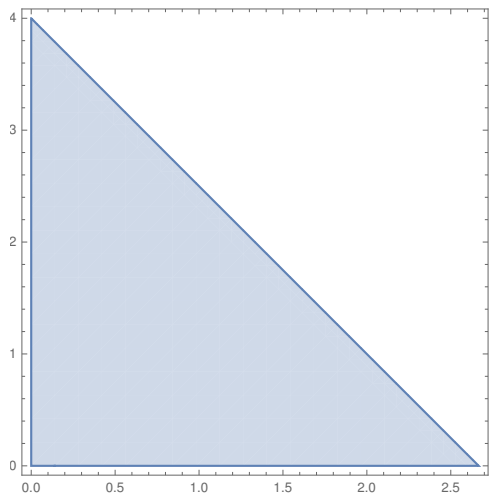


Figure 1: Região R

Calculando as derivadas parciais de σ, temos:

$$\sigma_y = (-3, 1, 0)$$

$$\sigma_z = (-2, 0, 1)$$

$$\Rightarrow \sigma_y \wedge \sigma_z = (1, 3, 2)$$

Repare que $\sigma_y \wedge \sigma_z \cdot \vec{k} > 0$.

Assim, calculamos a integral:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS = \int_0^4\int_0^{\frac{8-2z}{3}} \Big((8-3y-2z)yz, y^2z, (8-3y-2z)y\Big)\cdot(1,3,2)\,dy\,dz =$$

$$\int_0^4\int_0^{\frac{8-2z}{3}} \Big((8-3y-2z)(yz+2y)+3y^2z\Big)\,dy\,dz =$$

$$\int_0^4\int_0^{\frac{8-2z}{3}} (8yz+16y-3y^2z-6y^2-2yz^2-4yz+3y^2z)\,dy\,dz =$$

$$\int_0^4\int_0^{\frac{8-2z}{3}} \Big(y(4z+16-2z^2)-6y^2\Big)\,dy\,dz =$$

$$\int_0^4 \Big(\frac{y^2}{2}(4z+16-2z^2)-\frac{6y^3}{3}\Big)_{y=0}^{y=\frac{2(4-z)}{3}}\,dz =$$

$$\int_0^4 \Big(\frac{2^2}{3^2}(4-z)^2(2z+8-z^2)-\frac{2^4}{3^3}(4-z)^3\Big)\,dz =$$

$$\frac{2^2}{3^3}\int_0^4 \Big(3(4-z)^2(2z+8-z^2)-4(4-z)^3\Big)\,dz$$

Fazendo a mudança de variável $u = 4-z \Rightarrow du = -dz$, temos:

$$-\frac{4}{27}\int_4^0 \Big(3u^2(2(4-u)+8-(4-u)^2)-4u^3\Big)\,dz =$$

$$\frac{4}{27}\int_0^4 \Big(3u^2(6u-u^2)-4u^3\Big)\,dz = \frac{4}{27}\int_0^4 (14u^3-3u^4)\,dz =$$

$$\frac{4}{27}\Big(\frac{14u^4}{4}-\frac{3u^5}{5}\Big)_0^4 = \frac{5632}{135}$$

b) Uma parametrização possível para S é dada por

$$\sigma_S(\phi,\theta) = \begin{cases} x = 2\cos\theta\sin\phi \\ y = 2\sin\theta\sin\phi \\ z = 2\cos\phi \end{cases}$$

O domínio de σ_S é achado a partir da restrição dada.

$$z \geq \sqrt{x^2+y^2} \to \cos\phi \geq \sin\phi \to 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Calculando o diferencial de área necessário para a integral de superfície.

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_S}{\partial\phi} = (2\cos\theta\cos\phi, 2\sin\theta\cos\phi, -2\sin\phi) \\ \frac{\partial\sigma_S}{\partial\theta} = (-2\sin\theta\sin\phi, 2\cos\theta\sin\phi, 0) \\ \|\frac{\partial\sigma_S}{\partial\phi}\wedge\frac{\partial\sigma_S}{\partial\theta}\| = \|\left(4\cos\theta\sin^2\phi, 4\sin\theta\sin^2\phi, 4\cos\phi\sin\phi\right)\| = 4\sin\phi \end{cases}$$

Portanto, a massa de S é dada por

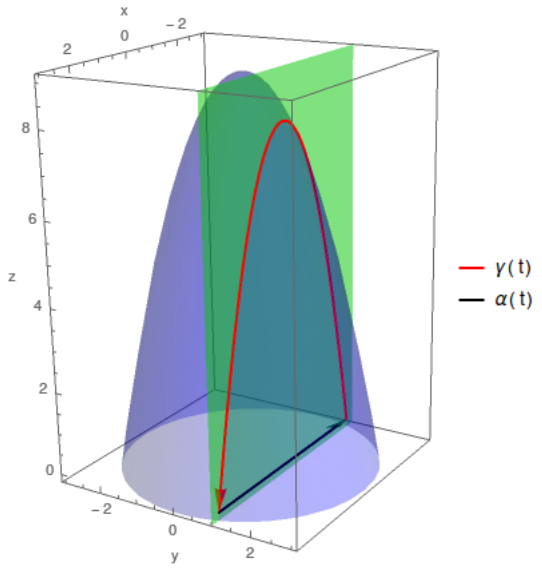
$$\begin{aligned}\iint_S \delta(x,y,z)\,dS &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \delta(\sigma(\phi,\theta))\,\|\frac{\partial\sigma_S}{\partial\phi}\wedge\frac{\partial\sigma_S}{\partial\theta}\|d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\phi 4\sin\phi d\phi d\theta = \\ & 32\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1-\cos^3\phi\right)\sin\phi d\phi = 32\pi\left[-\cos\phi+\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4\pi}{3}\left(16-11\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

2ª Questão: (3,0) Sejam $\vec{F}(x,y,z) = (2yz, y^3, x + \cos(z^4))$ e γ a intersecção de $z = 9 - x^2 - y^2$ e $y = 1$, percorrida de $\left(-2\sqrt{2}, 1, 0\right)$ a $\left(2\sqrt{2}, 1, 0\right)$. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução:

O cálculo direto da integral de linha é complicado, por isso, recorre-se ao Teorema de Stokes. Para tal, observa-se que γ não é uma curva fechada (o que pode ser observado na figura abaixo) e, então, é necessário adicionar uma curva auxiliar α tal que $\gamma + \alpha$ delimite uma região S contida no domínio de $\vec{F}$. Como $Dom\left(\vec{F}\right) = \mathbb{R}^3$, pode-se tomar α igual a

$$\begin{cases} \alpha(t) = \left(-2\sqrt{2}t, 1, 0\right) & -1 \leq t \leq 1 \\ \alpha'(t) = \left(-2\sqrt{2}, 0, 0\right) \end{cases}$$



A aplicação do Teorema de Stokes então fica

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

onde S é parte do plano $y = 1$ e, portanto, sua normal induzida pela orientação de $\gamma + \alpha$ é $(0, 1, 0)$. O Teorema de Stokes facilita o cálculo da integral pedida, já que a integral de linha sobre a imagem de α é simples, assim como a integral de superfície.

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \left(0, 1, -2\sqrt{2}t + 1\right) \cdot \left(-2\sqrt{2}, 0, 0\right) dt = \int_{-1}^{1} 0 dt = 0$$

A superfície S pode ser parameterizada por

$$\sigma_S(u,v) = \begin{cases} x = u \\ y = 1 \\ z = v \end{cases}$$

onde $Dom(\sigma_S) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | -2\sqrt{2} \leq u \leq 2\sqrt{2}, 0 \leq v \leq 8 - u^2\right\}$.

O rotacional de $\vec{F}$ é dado por

$$\nabla\times\vec{F} = \left(\frac{\partial\left(x+\cos\left(z^4\right)\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(y^3\right)}{\partial z}, \frac{\partial\left(2yz\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(x+\cos\left(z^4\right)\right)}{\partial x}, \frac{\partial\left(y^3\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(2yz\right)}{\partial y}\right) = (0, 2y-1, -2z)$$

Então, a integral de superfície sobre S fica

$$\iint_S \nabla\times\vec{F}\cdot\vec{n}dS = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\int_0^{8-u^2} (0, 2-1, -2v)\cdot(0,1,0)\,dvdu =$$

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\int_0^{8-u^2} dvdu = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} 8-u^2du = \left[8u - \frac{u^3}{3}\right]_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \frac{64\sqrt{2}}{3}$$

Logo, juntando os resultados parciais, tem-se que

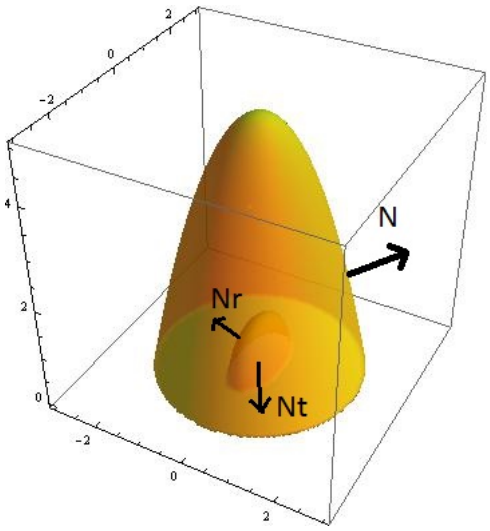
$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{64\sqrt{2}}{3}$$

3ª **Questão:** $(3,5)$ Sejam $\vec{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(4x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + (0,0,z^3)$ e S parte do paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$, orientada com $\vec{N}(0,0,5) = \vec{k}$. Calcule $\int\int_S \vec{F}.\vec{N}dS$.
Solução:

O campo $\vec{F}$ sera separado em uma soma de duas componentes, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, como indicado no proprio campo.

$\vec{F_1}$:

Para aplicar o teorema de Gauss, e necessario "fechar" a regiao e isolar a origem. Para tal, utilizaremos as superficies R e T.



$R : z = 0$

$R(u,v) = (u,v,0), \vec{N_R} = (0,0,-1)$

$I : 4x^2 + y^2 + z^2 = r^2; r << 1; z \geq 0$

$T(\theta\phi) = (r.cos\theta.sen(\phi)/2, r.sen\theta sen\phi, r.cos\phi)$

$T_\theta \times T_\phi = r^2.sen\phi(cos\theta.sen\phi, sen\theta.sen(\phi)/2, cos(\phi)/2)$ ($T_\theta \times T_\phi$ e interior)

$div\vec{F_1} = 0$

Aplicando o Teorema de Gauss:

$$\int\int_S \vec{F_1}.\vec{N}dS + \int\int_R \vec{F_1}.\vec{N}dR - \int\int_T \vec{F_1}.\vec{N}dT = 0$$

$$\int\int_S \vec{F_1}.\vec{N}dS = \int\int_T \vec{F_1}.\vec{N}dT - \int\int_R \vec{F_1}.\vec{N}dR$$

Integral sobre R:

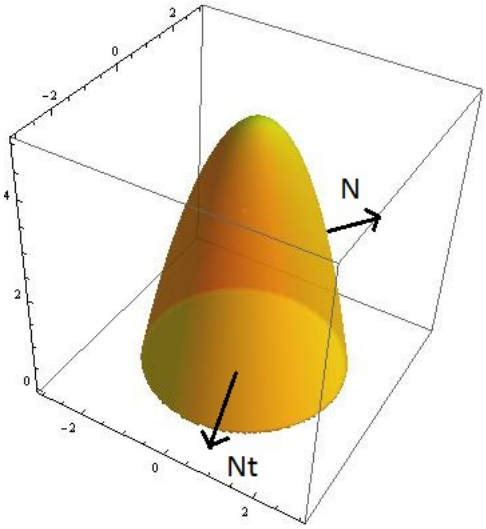
$$\int\int_R \vec{F_1}.\vec{N}dR = \int\int_D \frac{u,v,0}{(u^2+v^2)^{3/2}}.(0,0,-1)dS = 0$$

Integral sobre T:

$$\int\int_T \vec{F_1}.\vec{N}dT = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r^2.sen\phi.\frac{(r.cos\theta.sen(\phi)/2, r.sen\theta.sen\phi, r.cos\theta)}{r^3}$$
$$.(cos\theta.sen\theta, sen\theta.sen(\phi)/2, cos(\phi)/2)d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{sen\phi}{2}d\phi\theta = \pi.\int_0^{\pi/2} sen\phi d\phi = \pi$$

Logo: $\int\int_S \vec{F_1}.\vec{N}dS = \pi$
$\vec{F_2}$:
Devemos fechar a regiao em $T(u,v) = (u,v,0), \vec{N_T} = (0,0,-1), z = 0$



Aplicando o Teorema de Gauss:

$$\int\int_S \vec{F_2}.\vec{N}dS + \int\int_T \vec{F_2}.\vec{N_T} = \int\int\int_R div\vec{F_2}dxdydz$$

$$\int\int_T \vec{F_2}.\vec{N_T} = \int\int_{D_T}(0,0,0).(0,0,-1)dT = 0$$

$$\int\int\int_R div\vec{F_2}dxdydz = \int\int\int_R 3z^2dxdydz$$

Com $0 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2$, ou seja: $x^2 + y^2 \leq 5$

Usando coordenadas cilindricas:

$$\begin{aligned} x = \rho.cos\theta, 0 \leq \rho \leq \sqrt{5} \\ y = \rho.sen\theta, 0 \leq \theta \leq \ 2.\pi \\ z = z \\ J = \rho \end{aligned}$$

Assim:

$$\int_0^{2.\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{3-\rho^2} 3z^2 dz d\rho d\theta = 2.pi \int_0^{\sqrt{5}} 125\rho - 75\rho^3 + 15\rho^5 - \rho^7 d\rho$$

$$= 2.\pi.\frac{625}{8} = \frac{625.\pi}{4}$$

Portanto:

$$\int\int \vec{F}.\vec{N}.dS = \pi + \frac{625.\pi}{4} = \frac{629.\pi}{4}$$

Turma B
1ª Questão:

a) (1,5) Seja S parte do plano $2x + 3y + z = 4$ limitada pelos plano $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS$ onde $\vec{F}(x, y, z) = (xy, y^2z, xyz)$ com $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$.

b) (2,0) Seja S parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$. Calcule a massa de S sendo $\delta\,(x, y, z) = x^2 + y^2$.

Solução:

a) Para resolver o problema, primeiro parametrizamos a superfície S:

$$\sigma(x, y) = (x, y, 4 - 2x - 3y), (y, z) \in R$$

Sendo R a projeção de S no plano xy.

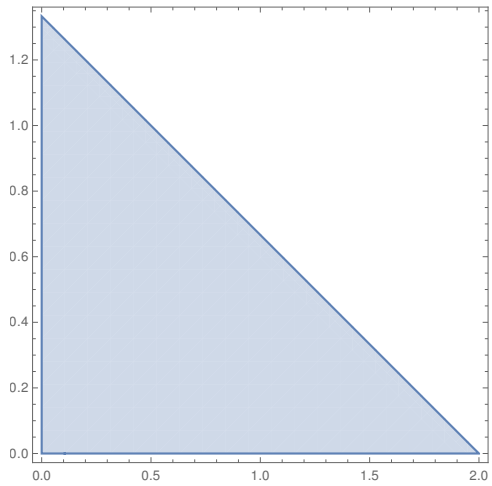


Figure 2: Região R

Calculando as derivadas parciais de σ, temos:

$$\sigma_x = (1, 0, -2)$$

$$\sigma_y = (0, 1, -3)$$

$$\Rightarrow \sigma_x \wedge \sigma_y = (2, 3, 1)$$

Repare que $\sigma_y \wedge \sigma_z \cdot \vec{k} > 0$.
Assim, calculamos a integral:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \int_0^2 \int_0^{\frac{4-2x}{3}} \Big(xy, y^2(4 - 2x - 3y), xy(4 - 2x - 3y)\Big) \cdot (2, 3, 1)\, dy\, dx =$$

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{4-2x}{3}} \Big((4-2x-3y)(3y^2+xy)+2xy\Big)\, dy\, dx =$$

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{4-2x}{3}} (12y^2+4xy-6xy^2-2x^2y-9y^3-3xy^2+2xy)\, dy\, dx =$$

$$\int_0^2 \int_0^{\frac{4-2x}{3}} \Big(y(6x-2x^2)+y^2(12-9x)-9y^3\Big)\, dy\, dx =$$

$$\int_0^2 \Big(\frac{y^2}{2}(6x-2x^2)+\frac{y^3}{3}(12-9x)-\frac{9y^4}{4}\Big)_{y=0}^{y=\frac{2(2-x)}{3}}\, dx =$$

$$\int_0^2 \Big(\frac{2(2-x)^2}{3^2}(6x-2x^2)+\frac{2^3(2-x)^3}{3^4}(12-9x)-\frac{9\cdot 2^2(2-x)^4}{3^4}\Big)\, dx =$$

$$\frac{2}{3^4}\int_0^2 \Big(9(2-x)^2(6x-2x^2)+4(2-x)^3(12-9x)-18(2-x)^4\Big)\, dx$$

Fazendo a mudança de variável $u = 2-x \Rightarrow du = -dx$, temos:

$$-\frac{2}{81}\int_2^0 \Big(9u^2(6(2-u)-2(2-u)^2)+4u^3(12-9(2-u))-18u^4\Big)\, du =$$

$$\frac{2}{81}\int_0^2 \Big(9u^2(4+2u-2u^2)+4u^3(-6+9u)-18u^4\Big)\, du =$$

$$\frac{2}{81}\int_0^2 \Big(36u^2-6u^3\Big)\, du = \frac{2\cdot 6}{81}\Big(\frac{6u^3}{3}-\frac{u^4}{4}\Big)_0^2 = \frac{16}{9}$$

b) Uma parametrização possível para S é dada por

$$\sigma_S(\phi,\theta) = \begin{cases} x = 2\cos\theta\sin\phi \\ y = 2\sin\theta\sin\phi \\ z = 2\cos\phi \end{cases}$$

O domínio de σ_S é achado a partir da restrição dada.

$$z \geq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}} \to \cos\phi \geq \frac{\sin\phi}{\sqrt{3}} \to 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Calculando o diferencial de área necessário para a integral de superfície.

$$\begin{cases} \frac{\partial\sigma_S}{\partial\phi} = (2\cos\theta\cos\phi, 2\sin\theta\cos\phi, -2\sin\phi) \\ \frac{\partial\sigma_S}{\partial\theta} = (-2\sin\theta\sin\phi, 2\cos\theta\sin\phi, 0) \\ \|\frac{\partial\sigma_S}{\partial\phi}\wedge\frac{\partial\sigma_S}{\partial\theta}\| = \|\left(4\cos\theta\sin^2\phi, 4\sin\theta\sin^2\phi, 4\cos\phi\sin\phi\right)\| = 4\sin\phi \end{cases}$$

Portanto, a massa de S é dada por

$$\iint_S \delta(x,y,z)\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \delta(\sigma(\phi,\theta))\, \|\frac{\partial\sigma_S}{\partial\phi}\wedge\frac{\partial\sigma_S}{\partial\theta}\| d\phi d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2\phi 4\sin\phi d\phi d\theta =$$

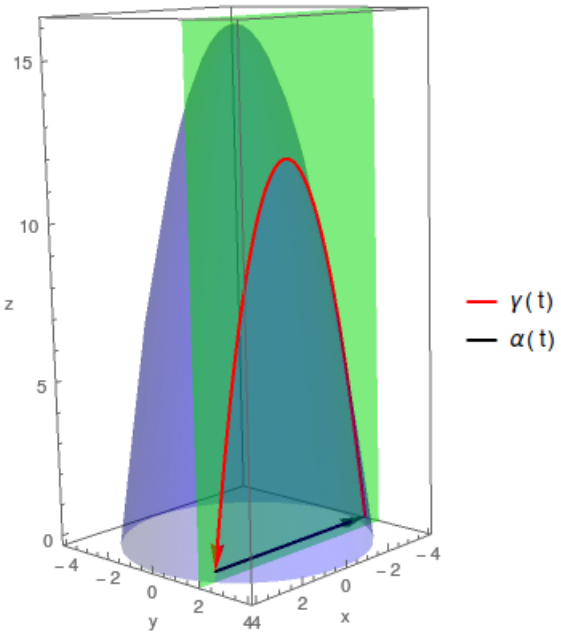
$$32\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(1-\cos^3\phi\right)\sin\phi d\phi = 32\pi\left[-\cos\phi+\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{20\pi}{3}$$

2ª Questão: (3,0) Sejam $\vec{F}(x,y,z) = (yz, y^3, x + \cos(z^4))$ e γ a intersecção de $z = 16 - x^2 - y^2$ e $y = 2$, percorrida de $\left(-2\sqrt{3}, 2, 0\right)$ a $\left(2\sqrt{3}, 2, 0\right)$. Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução:

O cálculo direto da integral de linha é complicado, por isso, recorre-se ao Teorema de Stokes. Para tal, observa-se que γ não é uma curva fechada (o que pode ser observado na figura abaixo) e, então, é necessário adicionar uma curva auxiliar α tal que $\gamma + \alpha$ delimite uma região S contida no domínio de $\vec{F}$. Como $Dom\left(\vec{F}\right) = \mathbb{R}^3$, pode-se tomar α igual a

$$\begin{cases} \alpha(t) = \left(-2\sqrt{3}t, 2, 0\right) & -1 \leq t \leq 1 \\ \alpha'(t) = \left(-2\sqrt{3}, 0, 0\right) \end{cases}$$



A aplicação do Teorema de Stokes então fica

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS$$

onde S é parte do plano $y = 2$ e, portanto, sua normal induzida pela orientação de $\gamma + \alpha$ é $(0, 1, 0)$. O Teorema de Stokes facilita o cálculo da integral pedida, já que a integral de linha sobre a imagem de α é simples, assim como a integral de superfície.

$$\int_\alpha \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} \vec{F}(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_{-1}^{1} \left(0, 8, -2\sqrt{3}t + 1\right) \cdot \left(-2\sqrt{3}, 0, 0\right) dt = \int_{-1}^{1} 0 dt = 0$$

A superfície S pode ser parameterizada por

$$\sigma_S(u, v) = \begin{cases} x = u \\ y = 2 \\ z = v \end{cases}$$

onde $Dom\left(\sigma_S\right) = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | -2\sqrt{3} \leq u \leq 2\sqrt{3}, 0 \leq v \leq 12 - u^2\right\}$.
O rotacional de $\vec{F}$ é dado por

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial\left(x + \cos\left(z^4\right)\right)}{\partial y} - \frac{\partial\left(y^3\right)}{\partial z}, \frac{\partial\left(yz\right)}{\partial z} - \frac{\partial\left(x + \cos\left(z^4\right)\right)}{\partial x}, \frac{\partial\left(y^3\right)}{\partial x} - \frac{\partial\left(yz\right)}{\partial y} \right) = (0, y-1, -z)$$

Então, a integral de superfície sobre S fica

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} dS = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \int_0^{12-u^2} (0, 2-1, -v) \cdot (0,1,0)\, dvdu =$$

$$\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \int_0^{12-u^2} dvdu = \int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} 12 - u^2 du = \left[12u - \frac{u^3}{3}\right]_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} = 32\sqrt{3}$$

Logo, juntando os resultados parciais, tem-se que

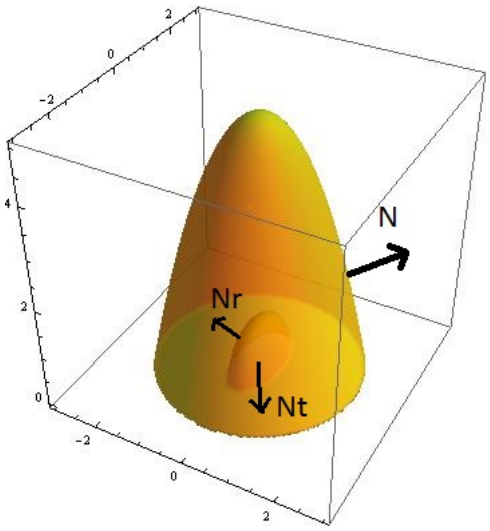
$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = 32\sqrt{3}$$

3ª **Questão:** $(3,5)$ Sejam $\vec{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(4x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + (0,0,z^3)$ e S parte do paraboloide $z = 5 - x^2 - y^2$, com $z \geq 0$, orientada com $\vec{N}(0,0,5) = \vec{k}$. Calcule $\int\int_S \vec{F}.\vec{N}dS$.
Solução:

O campo $\vec{F}$ sera separado em uma soma de duas componentes, $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, como indicado no proprio campo.

$\vec{F_1}$:

Para aplicar o teorema de Gauss, e necessario "fechar" a regiao e isolar a origem. Para tal, utilizaremos as superficies R e T.



$R : z = 0$

$R(u,v) = (u,v,0), \vec{N_R} = (0,0,-1)$

$I : 4x^2 + y^2 + z^2 = r^2; r << 1; z \geq 0$

$T(\theta\phi) = (r.cos\theta.sen(\phi)/2, r.sen\theta sen\phi, r.cos\phi)$

$T_\theta \times T_\phi = r^2.sen\phi(cos\theta.sen\phi, sen\theta.sen(\phi)/2, cos(\phi)/2)$ ($T_\theta \times T_\phi$ e interior)

$div\vec{F_1} = 0$

Aplicando o Teorema de Gauss:

$$\int\int_S \vec{F_1}.\vec{N}dS + \int\int_R \vec{F_1}.\vec{N}dR - \int\int_T \vec{F_1}.\vec{N}dT = 0$$

$$\int\int_S \vec{F_1}.\vec{N}dS = \int\int_T \vec{F_1}.\vec{N}dT - \int\int_R \vec{F_1}.\vec{N}dR$$

Integral sobre R:

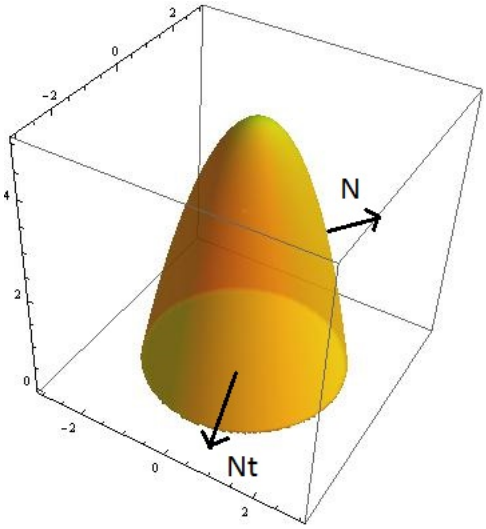
$$\int\int_R \vec{F_1}.\vec{N}dR = \int\int_D \frac{u,v,0}{(u^2+v^2)^{3/2}}.(0,0,-1)dS = 0$$

Integral sobre T:

$$\int\int_T \vec{F_1}.\vec{N}dT = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} r^2.sen\phi.\frac{(r.cos\theta.sen(\phi)/2, r.sen\theta.sen\phi, r.cos\theta)}{r^3}$$
$$.(cos\theta.sen\theta, sen\theta.sen(\phi)/2, cos(\phi)/2)d\phi d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{sen\phi}{2}d\phi\theta = \pi.\int_0^{\pi/2} sen\phi d\phi = \pi$$

Logo: $\int\int_S \vec{F_1}.\vec{N}dS = \pi$
$\vec{F_2}$:
Devemos fechar a regiao em $T(u,v) = (u,v,0), \vec{N_T} = (0,0,-1), z = 0$



Aplicando o Teorema de Gauss:

$$\int\int_S \vec{F_2}.\vec{N}dS + \int\int_T \vec{F_2}.\vec{N_T} = \int\int\int_R div\vec{F_2}dxdydz$$

$$\int\int_T \vec{F_2}.\vec{N_T} = \int\int_{D_T}(0,0,0).(0,0,-1)dT = 0$$

$$\int\int\int_R div\vec{F_2}dxdydz = \int\int\int_R 3z^2dxdydz$$

Com $0 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2$, ou seja: $x^2 + y^2 \leq 5$

Usando coordenadas cilindricas:

$$\begin{aligned} x = \rho.cos\theta, 0 \leq \rho \leq \sqrt{5} \\ y = \rho.sen\theta, 0 \leq \theta \leq \ 2.\pi \\ z = z \\ J = \rho \end{aligned}$$

Assim:

$$\int_0^{2.\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{3-\rho^2} 3z^2 dz d\rho d\theta = 2.pi \int_0^{\sqrt{5}} 125\rho - 75\rho^3 + 15\rho^5 - \rho^7 d\rho$$

$$= 2.\pi.\frac{625}{8} = \frac{625.\pi}{4}$$

Portanto:

$$\int\int \vec{F}.\vec{N}.dS = \pi + \frac{625.\pi}{4} = \frac{629.\pi}{4}$$