Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
3ª Prova - 1º Semestre 2014 - 24/6/2014

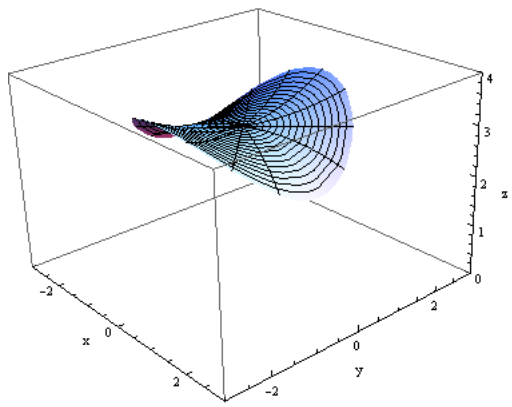
Turma A

1ª **Questão:** (3,0) Seja S a parte do hiperbolóide $x^2+z^2-y^2=9$ com $z\geq 0$, limitada por $x^2+y^2=4$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k}>0$.

(a) Dê uma parametrização de S e uma expressão para o campo de vetores normais $\vec{N}$.

(b) Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=(z,2z,x^2)$.

Solução:



(a) A projeção de S no plano (x,y) é o disco $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\leq 4\}$.

Portanto, uma parametrização de S é $\sigma(u,v)=(u,v,\sqrt{9+v^2-u^2})$, onde $(u,v)\in K=\{(u,v)\in\mathbb{R}^2|u^2+v^2\leq 4\}$.

Segue que

$$\sigma_u=\left(1,0,\frac{-u}{\sqrt{9+v^2-u^2}}\right),$$
$$\sigma_v=\left(0,1,\frac{v}{\sqrt{9+v^2-u^2}}\right),$$
$$\sigma_u\wedge\sigma_v=\left(\frac{u}{\sqrt{9+v^2-u^2}},\frac{-v}{\sqrt{9+v^2-u^2}},1\right).$$

O campo de vetores $\vec{N}$, unitário e normal ao longo de S tal que $\vec{N}\cdot\vec{k}>0$, é dado por $\vec{N}=\frac{\sigma_u\wedge\sigma_v}{||\sigma_u\wedge\sigma_v||}$. Como

$$||\sigma_u\wedge\sigma_v||=\frac{\sqrt{9+2v^2}}{\sqrt{9+v^2-u^2}},$$

obtemos

$$\vec{N}=\frac{1}{\sqrt{9+2v^2}}\left(u,-v,\sqrt{9+v^2-u^2}\right).$$

(b)

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_K \vec{F}(\sigma(u,v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v dudv$$
$$= \iint_K \left(\sqrt{9+v^2-u^2}, 2\sqrt{9+v^2-u^2}, u^2\right) \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{9+v^2-u^2}}, \frac{-v}{\sqrt{9+v^2-u^2}}, 1\right) dudv$$
$$= \iint_K (u - 2v + u^2) dudv$$

Utilizando coordenadas polares (r, θ) em K, com $u = r\cos\theta$ e $v = r\sin\theta$ em $K_{r\theta} = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, obtemos

$$\iint_K (u - 2v + u^2) dudv = \iint_{K_{r\theta}} (r\cos\theta - 2r\sin\theta + r^2\cos^2\theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 r^3 \cos^2\theta dr d\theta = 4\pi.$$

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** (3,5)Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{2x^2+y^2} + yz, \frac{x}{2x^2+y^2} - xz, e^{z^2} + z^2 \right),$$

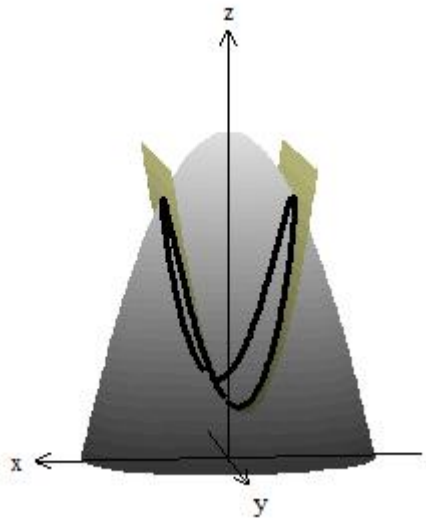
e γ é a intersecção de $z = 5 - x^2 - 2y^2$ e $z = 3x^2 + 1$, orientada de modo que a sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Solução: Igualando a expressão de z nas equações das duas superfícies, vemos que a projeção de γ no plano xy coincide com a elipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + \frac{y^2}{2} = 1\}$. Portanto, uma parametrização de γ é dada por

$$\gamma(t) = \left(\cos t, \sqrt{2} \sin t, 3\cos^2 t + 1 \right), t \in [0, 2\pi]. \tag{1}$$

Segue que

$$\gamma'(t) = \left(-\sin t, \sqrt{2} \cos t, -6 \sin t \cos t \right), t \in [0, 2\pi].$$



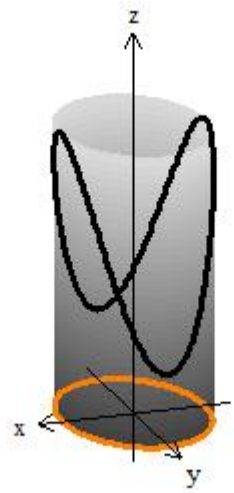
Para facilitar o cálculo da integral, separa-se o campo vetorial proposto em

$$\overrightarrow{F_1}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{2x^2+y^2}, \frac{x}{2x^2+y^2}, 0 \right) \ \overrightarrow{F_2}(x,y,z) = \left(yz, -xz, e^{z^2} + z^2 \right)$$

e assim, calcula-se cada integral separadamente utilizando o Teorema de Stokes.

Observe que $\overrightarrow{F_1}$ não está definido em todo $\mathbb{R}^3$. Seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$.

Vamos escolher uma superfície S_1 cuja fronteira contenha γ, mas que não intercepta o eixo z, de modo que $S \subset Dom(\vec{F_1})$. Tome $S_1 = \{(x,y,z) | x^2 + \frac{y^2}{2} = 1, 0 \leq z \leq 3x^2 + 1\}$



A fronteira de S_1 é composta de γ e da curva α que é a elipse $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ no plano xy $(z = 0)$.

Na superfície S_1 cuja fronteira $\gamma \cup \alpha$ pode-se aplicar o Teorema de Stokes.

Orientando α no sentido anti-horário, temos

$$-\int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_\alpha \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{S_1} rot\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{N} dS$$

Note que para valer o Teorema temos que tomar $-\gamma$, isto é, mudar o sentido de γ para o horário.

Como o campo $\overrightarrow{F_1}$ é irrotacional, a igualdade acima se resume a

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_\alpha \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Logo, resta parametrizar α e calcular a integral do lado direito.

$$\alpha(t) = \left(\cos t, \sqrt{2}\sin t, 0\right) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha(t) = \left(-\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0\right)$$

$$\int_\alpha \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F_1}\left(\gamma\left(t\right)\right) \cdot \alpha^{'}\left(t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sqrt{2}\sin t}{2}, \frac{\cos t}{2}, 0\right) \cdot \left(-\sin t, \sqrt{2}\cos t, 0\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} dt = \pi\sqrt{2}$$

OBS: Pode-se calcular diretamente a integral de linha de F_1 sobre γ.

$$\begin{aligned} &\int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F_1}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sqrt{2}\sin t}{2}, \frac{\cos t}{2}, 0\right) \cdot \left(-\sin t, \sqrt{2}\cos t, -6\cos t \sin t\right) dt = \pi\sqrt{2}, \end{aligned} \tag{2}$$

Agora vamos olhar para o campo $\vec{F_2}$. Como o domínio de $\overrightarrow{F_2}$ é todo o $\mathbb{R}^3$, o Teorema de Stokes pode ser aplicado diretamente, numa superfície que tem γ como bordo. Seja a superfície S_2 dada por

$$S_2 = \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{2} \leq 1 \\ z = 3x^2 + 1 \end{cases}$$

orientada de modo que a normal aponta "para cima", isto é, $\vec{N_2} \cdot \vec{k} > 0$. Então γ é bordo de S_2 e a orientação induzida por $\vec{N_2}$ é dada pelo enunciado (anti-horário). Portanto,

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{S_2} rot\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{N} dS$$

$$rot\overrightarrow{F_2} = (x, y, -2z)$$

$$\sigma(r, \theta) = \left(r\cos\theta, \sqrt{2}r\sin\theta, 3r^2\cos^2\theta + 1\right) \quad 0 \leq r \leq 1 \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\sigma_r = \left(\cos\theta, \sqrt{2}\sin\theta, 6r\cos^2\theta\right)$$

$$\sigma_\theta = \left(-r\sin\theta, \sqrt{2}r\cos\theta, -6r^2\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \left(-6\sqrt{2}r^2\cos\theta, 0, \sqrt{2}r\right)$$

O cálculo da integral de superfície fica

$$\iint_{S_2} rot\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{N} dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(r\cos\theta, \sqrt{2}r\sin\theta, -6r^2\cos^2\theta - 2\right) \cdot \left(-6\sqrt{2}r^2\cos\theta, 0, \sqrt{2}r\right) d\theta dr =$$

$$-\int_0^1 \int_0^{2\pi} 12\sqrt{2}r^3\cos^2\theta + 2\sqrt{2}r \, d\theta dr = -5\sqrt{2}\pi.$$

Portanto, o resultado final é

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dr} = \sqrt{2}\pi - 5\sqrt{2} = -4\sqrt{2}\pi.$$

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** (3,5) Calcule

$$\iint_S y^3 dy \wedge dz + \left(3yx + \ln\left(z^2+1\right)\right) dz \wedge dx + \left(z^2 - 3xz - x^2\right) dx \wedge dy$$

onde S é a superficie dada por $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1,\ z \geq 2$, orientada pela normal unitária $\vec{n}$ que satisfaz $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

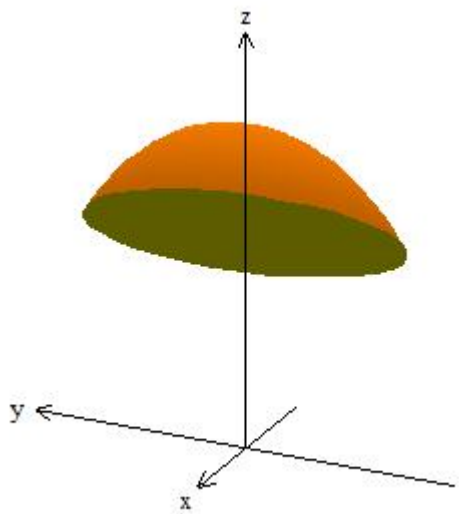
Solução: Denotando $\vec{F}(x,y,z) = (y^3, 3yx + \ln(z^2+1), z^2 - 3xz - x^2)$, queremos calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$. Para utilizarmos o Teorema de Gauss, devemos tomar um sólido tal que S seja parte da sua fronteira. Note que S não é uma superfície fechada.

Seja $B = \{(x,y,z) | x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1,\ z \geq 2\}$

Observa-se que o campo vetorial $\overrightarrow{F}$ não apresenta singularidades no domínio, tornando a aplicação do Teorema de Gauss válida para B. A fronteira de B é composta por S e por T parte do plano $z = 2$ com $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{2^2}{9} \leq 1$, ou seja, $x^2 + \frac{y^2}{4} \leq \frac{5}{9}$.

Vamos orientar T com a normal $\vec{n}_T = -\vec{k}$, pois para aplicar o Teorema de Gauss a orientação do bordo de B deve ser exterior a B.

As superficies S e T são mostradas na figura abaixo.



Temos então pelo Teorema da divergência de Gauss

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_T \vec{F} \cdot \vec{n}_T dS = \iiint_B \text{div}\vec{F} dxdydz = \iiint_B 2z dxdydz. \tag{3}$$

Para calcularmos o lado direito de (5), usamos coordenadas cilíndricas[1]

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= 2r\sin\theta, \\ z &= w. \end{aligned}$$

O determinante Jacobiano dessa mudança de variável é dado por $2r$. Observe que o sólido B corresponde nas coordenadas (r, θ, w) ao sólido

$$K_{r\theta w} := \left\{ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 2 \leq w \leq 3, 0 \leq r \leq \sqrt{1 - \frac{w^2}{9}} \right\}.$$

[1]Na turma B usamos coordenadas esféricas.

Temos então

$$\iiint_B 2zdxdydz = \iiint_{K_{r\theta w}} 2w2rdrdwd\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_2^3\int_0^{\sqrt{1-w^2/9}} 4wrdrdwd\theta = 4\pi\int_2^3 w\left(1-\frac{w^2}{9}\right)dw$$
$$= 4\pi\int_2^3\left(w-\frac{w^3}{9}\right)dw = 4\pi\left(\frac{1}{2}(9-4)-\frac{1}{36}(81-16)\right) = 4\pi\left(\frac{5}{2}-\frac{65}{36}\right) = \frac{25}{9}\pi.$$

Vamos parametrizar T. Seja $\sigma(u,v) = (u,v,2)$, onde $(u,v) \in K := \left\{(u,v)\|\frac{u^2}{5/9}+\frac{v^2}{20/9} \leq 1\right\}$. E $\sigma_u \wedge \sigma_v = (0,0,1)$.

Como $\vec{F}\cdot\vec{n}_T = -4+6x+x^2$ e, temos que

$$\iint_T \vec{F}\cdot\vec{n}_T dS = \iint_K (-4+6u+u^2)\|\sigma_u\wedge\sigma_v\|dudv$$

Usando coordenadas polares $u = \frac{\sqrt{5}}{3}r\cos\theta$ e $v = \frac{2\sqrt{5}}{3}r\sin\theta$, com $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 1$, obtemos

$$\iint_T \vec{F}\cdot\vec{n}_T dS = -4\text{Area}(K) + \int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{5}{9}r^2\cos^2\theta\frac{10}{9}rdrd\theta = -\frac{40}{9}\pi + \frac{25}{162}\pi = -\frac{695}{162}\pi.$$

Segue que $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \frac{25}{9}\pi + \frac{695}{162}\pi = \frac{1145}{162}\pi.$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
3ª Prova - 1º Semestre 2014 - 24/6/2014

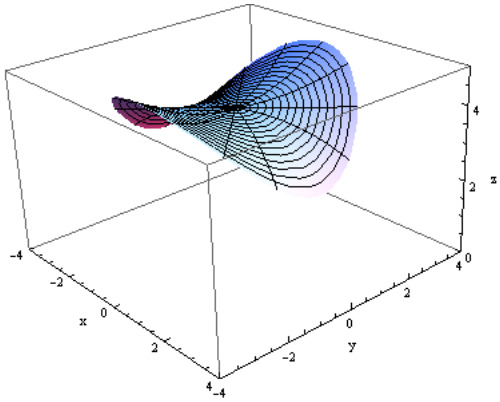
Turma B

1ª **Questão:** (3,0) Seja S a parte do hiperbolóide $x^2 + z^2 - y^2 = 16$ com $z \geq 0$, limitada por $x^2 + y^2 = 9$, orientada com $\vec{N}$ tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$.

(a) Dê uma parametrização de S e uma expressão para o campo de vetores normais $\vec{N}$.

(b) Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$, onde $\vec{F}(x, y, z) = (z, 2z, x^2)$.

Solução:



(a) A projeção de S no plano (x, y) é o disco $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 9\}$. Portanto, uma parametrização de S é $\sigma(u, v) = (u, v, \sqrt{16 + v^2 - u^2})$, onde $(u, v) \in K = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u^2 + v^2 \leq 9\}$.

Segue que

$$\sigma_u = \left(1, 0, \frac{-u}{\sqrt{16 + v^2 - u^2}}\right),$$
$$\sigma_v = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{16 + v^2 - u^2}}\right),$$
$$\sigma_u \wedge \sigma_v = \left(\frac{u}{\sqrt{16 + v^2 - u^2}}, \frac{-v}{\sqrt{16 + v^2 - u^2}}, 1\right).$$

O campo de vetores $\vec{N}$, unitário e normal ao longo de S tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$, é dado por $\vec{N} = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{||\sigma_u \wedge \sigma_v||}$. Como

$$||\sigma_u \wedge \sigma_v|| = \frac{\sqrt{16 + 2v^2}}{\sqrt{16 + v^2 - u^2}},$$

obtemos

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{16 + 2v^2}} \left(u, -v, \sqrt{16 + v^2 - u^2}\right).$$

(b)

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS = \iint_K \vec{F}(\sigma(u,v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v du dv$$
$$= \iint_K \left(\sqrt{16+v^2-u^2}, 2\sqrt{16+v^2-u^2}, u^2\right) \cdot \left(\frac{u}{\sqrt{16+v^2-u^2}}, \frac{-v}{\sqrt{16+v^2-u^2}}, 1\right) du dv$$
$$= \iint_K (u - 2v + u^2) du dv$$

Utilizando coordenadas polares (r, θ) em K, com $u = r\cos\theta$ e $v = r\sin\theta$ em $K_{r\theta} = \{(r,\theta) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq r \leq 3, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$, obtemos

$$\iint_K (u - 2v + u^2) du dv = \iint_{K_{r\theta}} (r\cos\theta - 2r\sin\theta + r^2\cos^2\theta) r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^3 r^3 \cos^2\theta dr d\theta = \frac{81}{4}\pi.$$

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** (3,5) Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+2y^2} + yz, \frac{x}{x^2+2y^2} - xz, e^{z^2} + z^2 \right),$$

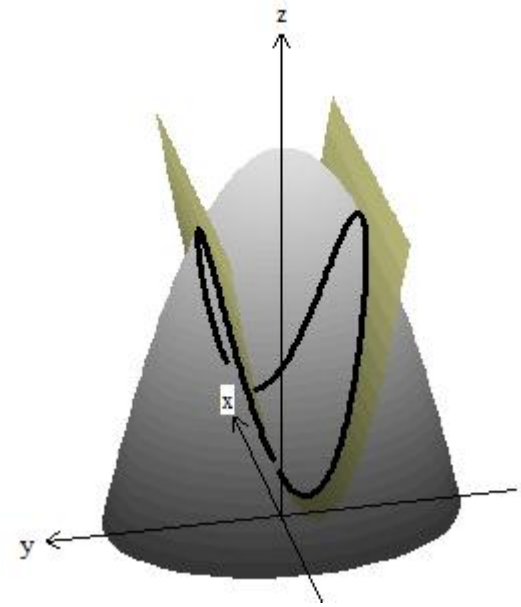
e γ é a intersecção de $z = 5 - 2x^2 - y^2$ e $z = 3y^2 + 1$, orientada de modo que a sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido anti-horário.

Solução: Igualando a expressão de z nas equações das duas superfícies, vemos que a projeção de γ no plano xy coincide com a elipse $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \frac{x^2}{2} + y^2 = 1\}$. Portanto, uma parametrização de γ é dada por

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{2}\cos t, \sin t, 3\sin^2 t + 1 \right), t \in [0, 2\pi]. \tag{4}$$

Segue que

$$\gamma'(t) = \left(-\sqrt{2}\sin t, \cos t, 6\sin t \cos t \right), \forall t.$$



Para facilitar o cálculo da integral, separa-se o campo vetorial proposto em

$$\overrightarrow{F_1}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+2y^2}, \frac{x}{x^2+2y^2}, 0 \right) \quad \overrightarrow{F_2}(x,y,z) = \left(yz, -xz, e^{z^2} + z^2 \right)$$

e assim, calcula-se cada integral separadamente utilizando o Teorema de Stokes.

Observe que $\overrightarrow{F_1}$ não está definido em todo $\mathbb{R}^3$. Seu domínio é o conjunto $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,z) | z \in \mathbb{R}\}$.

Vamos escolher uma superfície S_1 cuja fronteira contenha γ, mas que não intercepta o eixo z, de modo que $S \subset Dom(\vec{F_1})$. Tome $S_1 = \{(x,y,z) | \frac{x^2}{2} + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 3y^2 + 1\}$

A fronteira de S_1 é composta de γ e da curva α que é a elipse $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ no plano xy $(z = 0)$.

Na superfície S_1 cuja fronteira $\gamma \cup \alpha$ pode-se aplicar o Teorema de Stokes.

Orientando α no sentido anti-horário, temos

$$-\int_{\gamma} \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_{\alpha} \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{S_1} rot\overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{N} dS$$

Note que para valer o Teorema temos que tomar $-\gamma$, isto é, mudar o sentido de γ para o horário.

Como o campo $\overrightarrow{F_1}$ tem rotacional nulo, a igualdade acima se resume a

$$\int_{\gamma} \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{\alpha} \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Logo, resta parametrizar α e calcular a integral do lado direito.

$$\alpha(t) = \left(\sqrt{2}\cos t, \sin t, 0\right) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\alpha(t) = \left(-\sqrt{2}\sin t, \cos t, 0\right)$$

$$\int_{\alpha} \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_0^{2\pi} \overrightarrow{F_1}\left(\gamma\left(t\right)\right) \cdot \alpha^{'}\left(t\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sin t}{2}, \frac{\sqrt{2}\cos t}{2}, 0\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\sin t, \cos t, 0\right) dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{2}}{2} dt = \sqrt{2}\pi.$$

OBS: Pode-se calcular diretamente a integral de linha de F_1 sobre γ.

Agora vamos olhar para o campo $\vec{F_2}$. Como o domínio de $\overrightarrow{F_2}$ é todo o $\mathbb{R}^3$, o Teorema de Stokes pode ser aplicado diretamente, numa superfície que tem γ como bordo. Seja a superfície S_2 dada por

$$S_2 = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1 \\ z = 3y^2 + 1 \end{cases}$$

orientada de modo que a normal aponta "para cima", isto é, $\vec{N_2} \cdot \vec{k} > 0$. Então γ é bordo de S_2 e a orientação induzida por $\vec{N_2}$ é dada pelo enunciado (anti-horário). Portanto,

$$\int_{\gamma} \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_{S_2} rot\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{N} dS$$

$$rot\overrightarrow{F_2} = (x, y, -2z)$$

$$\sigma\left(r, \theta\right) = \left(\sqrt{2}r\cos\theta, r\sin\theta, 3r^2\sin^2\theta + 1\right) \quad 0 \leq r \leq 1 \;\; 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\sigma_r = \left(\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta, 6r\sin^2\theta\right)$$

$$\sigma_\theta = \left(-\sqrt{2}r\sin\theta, r\cos\theta, -6r^2\sin\theta\cos\theta\right)$$

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \left(-6\sqrt{2}r^2\sin\theta, 0, \sqrt{2}r\right)$$

O cálculo da integral de superfície fica

$$\iint_{S_2} rot\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{N} dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{2}r\cos\theta, r\sin\theta, -6r^2\sin^2\theta - 2\right) \cdot \left(-6\sqrt{2}r^2\sin\theta, 0, \sqrt{2}r\right) d\theta dr =$$

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} -12\sqrt{2}r^3 \sin^2\theta - 2\sqrt{2}r d\theta dr = \int_0^1 \left[-12\sqrt{2}r^3 \left(\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) - 2\sqrt{2}r\theta \right] |_0^{2\pi} \, dr =$$

$$\int_0^1 -12\pi\sqrt{2}r^3 - 4\pi\sqrt{2}r dr = -3\pi\sqrt{2} - 2\pi\sqrt{2} = -5\pi\sqrt{2}$$

Portanto, o resultado final é

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} + \int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dr} = \pi\sqrt{2} - 5\pi\sqrt{2} = -4\pi\sqrt{2}$$

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** (3,5) Calcule

$$\iint_S y^3 dy \wedge dz + (3yx + \ln(z^2+1))dz \wedge dx + (z^2 - 3xz - x^2)dx \wedge dy,$$

onde S é a superfície dada por $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, z \geq 1$, orientada pela normal unitária $\vec{n}$ que satisfaz $\vec{n} \cdot \vec{k} > 0$.

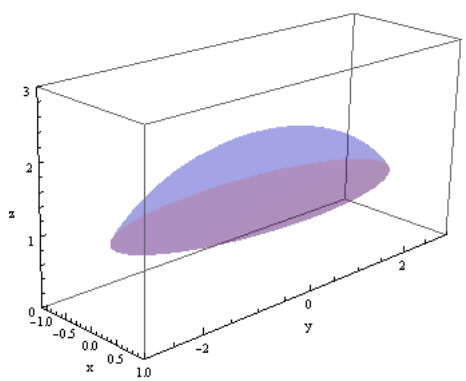
Solução: Denotando $\vec{F}(x,y,z) = (y^3, 3yx + \ln(z^2+1), z^2 - 3xz - x^2)$, queremos calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS$. Para utilizarmos o Teorema de Gauss, devemos tomar um sólido tal que S seja parte da sua fronteira. Note que S não é uma superfície fechada.

Seja $B = \{(x,y,z) | x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \leq 1,\ z \geq 1\}$

Observa-se que o campo vetorial $\overrightarrow{F}$ não apresenta singularidades no domínio, tornando a aplicação do Teorema de Gauss válida para B. A fronteira de B é composta por S e por T parte do plano $z = 1$ com $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{1^2}{4} \leq 1$, ou seja, $x^2 + \frac{y^2}{9} \leq \frac{3}{4}$.

Vamos orientar T com a normal $\vec{n}_T = -\vec{k}$, pois para aplicar o Teorema de Gauss a orientação do bordo de B deve ser exterior a B.

As superficies S e T são mostradas na figura abaixo.



Temos então pelo Teorema da divergência de Gauss

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} dS + \iint_T \vec{F} \cdot \vec{n}_T dS = \iiint_B \text{div}\vec{F} dxdydz = \iiint_B 2z dxdydz. \tag{5}$$

Para calcularmos o lado direito de (**??**), usamos coordenadas esféricas

$$\begin{aligned} x &= r \sin\varphi \cos\theta, \\ y &= 3r \sin\varphi \sin\theta, \\ z &= 2r \cos\varphi. \end{aligned}$$

O determinante Jacobiano dessa mudança de variável é dado por $6r^2 \sin\varphi$. Observe que o sólido B corresponde nas coordenadas (r, φ, θ) ao sólido

$$K_{r\varphi\theta} := \left\{ 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2\cos\varphi} \leq r \leq 1 \right\}.$$

Temos então

$$\iiint_B 2z\,dxdydz = \iiint_{K_{r\varphi\theta}} 4r\cos\varphi 6r^2\sin\varphi\,drd\varphi d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_{1/(2\cos\varphi)}^1 24r^3\sin\varphi\cos\varphi\,drd\varphi d\theta = 12\pi\int_0^{\pi/3}\left(1-\frac{1}{16\cos^4\varphi}\right)\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$$
$$= 12\pi\int_0^{\pi/3}\left(\frac{\sin 2\varphi}{2}-\frac{1}{16}\frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi}\right)d\varphi = 6\pi\left(\frac{-\cos 2\varphi}{2}\bigg|_0^{\pi/3}+\frac{1}{8}\int_{-1}^{-1/2}\frac{1}{u^3}du\right)$$
$$= 6\pi\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{8}\frac{1}{2u^2}\bigg|_{-1}^{-1/2}\right) = 6\pi\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{16}(4-1)\right) = \frac{27}{8}\pi.$$

Usamos acima a mudança de variável $u = -\cos\varphi$.

Vamos parametrizar T. Seja $\sigma(u,v) = (u,v,1)$, onde $(u,v) \in K := \left\{(u,v)\|\frac{u^2}{3/4}+\frac{v^2}{27/4}\leq 1\right\}$. E $\sigma_u \wedge \sigma_v = (0,0,1)$.

Como $\vec{F}\cdot\vec{n}_T = -1+3x+x^2$ e, temos que

$$\iint_T \vec{F}\cdot\vec{n}_T dS = \iint_K (-1+3u+u^2)\|\sigma_u\wedge\sigma_v\|dudv$$

Usando coordenadas polares $x = \frac{\sqrt{3}}{2}r\cos\theta$ e $y = \frac{3\sqrt{3}}{2}r\sin\theta$, com $0\leq\theta\leq 2\pi$ e $0\leq r\leq 1$, obtemos

$$\iint_T \vec{F}\cdot\vec{n}_T dS = -\text{Area}(K)+\int_0^{2\pi}\int_0^1 \frac{3}{4}r^2\cos^2\theta\frac{9}{4}r\,drd\theta = -\frac{9}{4}\pi+\frac{27}{64}\pi = -\frac{117}{64}\pi.$$

Segue que $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}dS = \frac{27}{8}\pi+\frac{117}{64}\pi = \frac{333}{64}\pi.$