MAT 2455 – Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
Prova 3 – 18/06/2013 – Turma A

Questão 1.

(a) (1,5 pontos) Determine a massa da superfície S dada por $z = x^2 + y^2 + 2xy$ limitada por $x^2 + y^2 = 2$, sabendo que a densidade é dada por $\delta(x, y, z) = \dfrac{2x^2 + 3y^2}{\sqrt{1 + 8z}}$

(b) (1,5 pontos) Seja $\vec{F}(x, y, z) = (\cos^2 z, \cos^2 y, \sin z)$ e S a parte da superfície $x = \sin y + \cos z$ limitada por $z = 0$, $z = 2$, $y = -1$ e $y = 1$, orientada por $\vec{N}$ tal que $\vec{N}.\vec{i} < 0$ Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}.\vec{N}\, d\sigma$

Solução

(a) Uma parametrização para S é dada por $S(u, v) = (u, v, u^2 + v^2 + 2uv)$, com $u^2 + v^2 \leq 2$. Calculando os vetores tangentes em cada direção para calcular, em seguida, o vetor normal:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial u} &= (1, 0, 2u + 2v)\\
\frac{\partial S}{\partial v} &= (0, 1, 2u + 2v)\\
\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial u} &= (-2u - 2v, -2u - 2v, 1)\\
\left\|\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial u}\right\| &= \sqrt{8u^2 + 8v^2 + 16uv + 1}
\end{aligned}$$

A massa, obtida pela integral $M = \displaystyle\iint_S \delta(S(u, v)).\left\|\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial u}\right\|$ pode ser calculada:

$$\begin{aligned}
M &= \iint_D \frac{2u^2 + 3v^2}{\sqrt{8u^2 + 8v^2 + 16uv + 1}}.\sqrt{8u^2 + 8v^2 + 16uv + 1}\, du\, dv\\
&= \iint_D 2u^2 + 3v^2\, du\, dv \qquad\qquad \text{com } D = \{0 \leq u^2 + v^2 \leq 2\}\\
&\quad \text{Utilizando coordenadas polares:} u = \rho\cos\theta, v = \rho\sin\theta, J = \rho, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 2\rho^3 + \rho^3\sin^2\theta\, d\rho\, d\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{2} + \frac{\rho^4}{4}\sin^2\theta\Big|_0^{\sqrt{2}}\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2 + \sin^2\theta\, d\theta \\
&= 4\pi + \pi \\
&= 5\pi
\end{aligned}
$$

(b) Uma parametrização para S é dada por $S(u,v) = (\sin u + \cos v, u, v)$, com $-1 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 2$. Calculando os vetores tangentes em cada direção para calcular, em seguida, o vetor normal:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial u} &= (\cos u, 1, 0) \\
\frac{\partial S}{\partial v} &= (-\sin v, 0, 1) \\
\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial u} &= (1, -\cos u, \sin v)
\end{aligned}
$$

Como $\vec{N}.\vec{i} < 0$, a normal utilizada será $\vec{N} = (-1, \cos u, -\sin v)$

$$
\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}.\vec{N}\, dS &= \int_0^2\int_{-1}^1 (\cos^2 v, \cos^2 u, \sin v).(-1, \cos u, -\sin v)\, du\, dv \\
&= \int_0^2\int_{-1}^1 -\cos^2 v + \cos^3 u - \sin^2 v\, du\, dv \\
&= \int_0^2\int_{-1}^1 \cos^3 u - 1\, du\, dv \\
&= \int_0^2 \sin u - \frac{\sin^3 u}{3} - u\Big|_{-1}^1\, dv \\
&= \int_0^2 2\sin 1 - \frac{2}{3}\sin^3 1 - 2\, dv \\
&= 4\sin 1 - \frac{4}{3}\sin^3 1 - 4
\end{aligned}
$$

Questão 2. Seja γ a curva dada pela intersecção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 6$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário. Calcule $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ nos segiuntes casos:

(a) (1,5 pontos) $\vec{F}(x,y,z) = \left(x - y, x - z + \dfrac{y^2}{2 + \sin y}, y\right)$

(b) (2,0 pontos) $\vec{F}(x,y,z) = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{\sin z}{8+z^4}\right)$

Solução

A curva γ é dada por $\gamma(t) = (\sqrt{6}\cos t, \sqrt{6}\sin t, 6)$

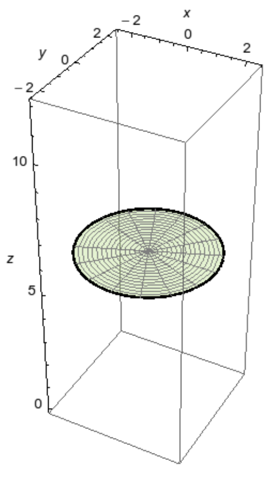
(a) O domínio do campo $\vec{F}$ é $\mathbb{R}^3$. Logo é possível escolher qualquer superfície para utilizar o Teorema de Stokes. Escolhendo o plano $z = 6$, com $x^2 + y^2 \leq 6$

Calculando o rotacional:

$$\text{rot}\vec{F} = (2, 0, 2)$$

Teorema de Stokes

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r} &= \iint_S \text{rot}\vec{F}.\vec{n}\,dS \\
&= \iint_S (2,0,2).(0,0,1)\,dS \\
&= \iint_S 2\,dS \\
&= 2\text{Área}(S) \\
&= 12\pi
\end{aligned}$$



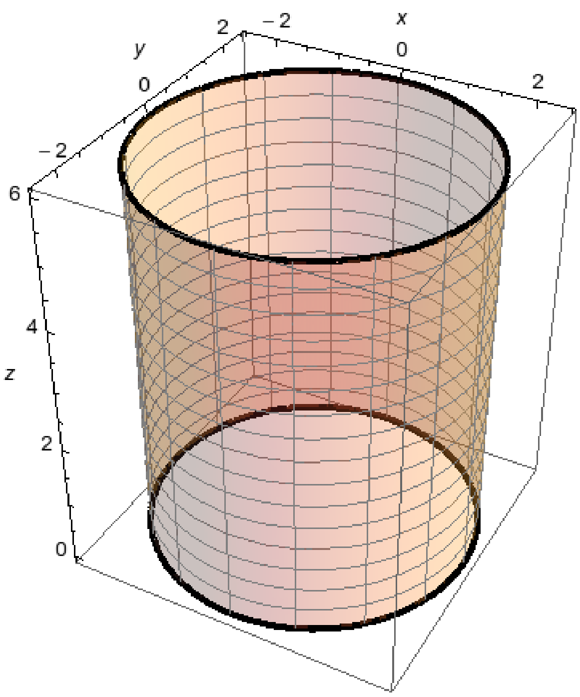
(b) Nesse caso, o domínio do campo $\vec{F}$ é Dom $\vec{F} = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z)\}$. Com isso, é necessário escolher uma superfície limitada na qual não haja intersecções com o eixo z. Uma opção, é o cilindro $x^2 + y^2 = 6$. Para limitar a superfície, é necessário considerar uma curva α em $z = 0$, para, junto com γ, formar o bordo de S.

Teorema de Stokes

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{F}\, dS$$

Como $\mathrm{rot}\vec{F} = 0$, é necessário calcular, apenas, a integral sobre a curva α. A curva γ induz uma orientação de vetor normal para dentro da superfície S. Baseado nisso, a orientação de α necessária será dada pela seguinte parametrização $\alpha(t) = (\sqrt{6}\sin t, \sqrt{6}\cos t, 0)$ com vetor tangente dado por $\alpha'(t) = (\sqrt{6}\cos t, -\sqrt{6}\sin t, 0)$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} &= -\int_\alpha \vec{F}\, d\vec{r} \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sqrt{6}\cos t}{6}, \frac{\sqrt{6}\sin t}{6}, 0 \right) .(\sqrt{6}\cos t, -\sqrt{6}\sin t, 0)\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} -1\, dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$



Questão 3. Calcule $\iint_S \vec{F}.\vec{N}\, d\sigma$, onde:

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{z^3}{3}\vec{k}$$

e S é a superfície $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, orientada pela normal unitária exterior $\vec{N}$.

Solução

Dividindo o campo $\vec{F}$ em duas componentes $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, sendo que a primeira componente corresponde à primeira fração de $\vec{F}$ e a segunda componente, à segunda fração.

Calculam-se as integrais de fluxo separadamente para cada componente.

Cálculo para $\vec{F_1}$

Como o domínio de $\vec{F_1}$ é igual a $\mathbb{R} - \{(0,0,0)\}$, e a região interior à S contém a origem, isola-se a origem com uma pequena esfera (S_2) de raio r, cuja parametrização e vetor normal são dados por:

$$S_2(\theta,\phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)$$

$$\vec{N} = r^2\sin\phi(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

Nota-se que esse vetor aponta na direção positiva do eixo z, logo, para o interior da região de integração R e no sentido contrário ao desejado. Basta inverter o sinal da integral, no Teorema de Gauss.

Como div$\vec{F_1}$=0, ao utilizar-se o Teorema de Gauss, o cálculo da integral de fluxo fica dado por:

$$\iint_S \vec{F_1}\,\vec{N}\,dS - \iint_{S_2} \vec{F_1}\,\vec{N}\,dS_2 = 0$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\,\vec{N}\,dS &= \iint_{S_2} \vec{F_1}\,\vec{N}\,dS_2 \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)}{r^3}.r^2\sin\phi(\cos\theta\sin\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\phi)\,d\phi\,d\theta \\
&= \pi\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

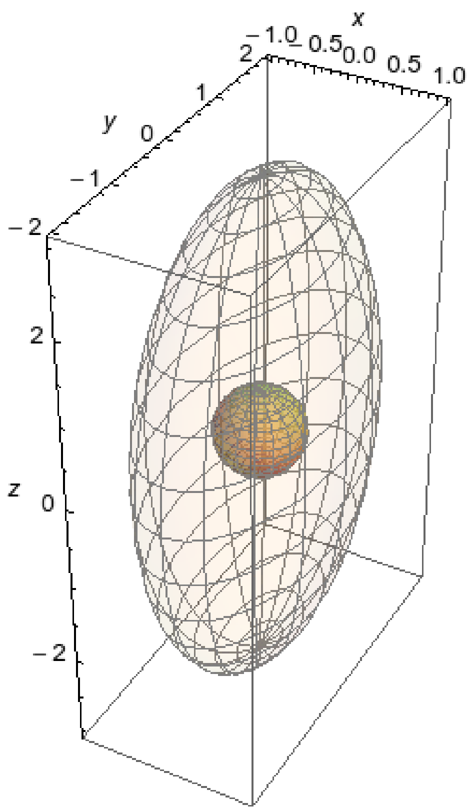
Cálculo para $\vec{F_2}$

Como não há restrições no domínio de $\vec{F_2}$, basta aplicar o Teorema de Gauss diretamente, da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}.\vec{N}\, dS &= \iiint_R \mathrm{div}\vec{F}_2\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_R z^2\, dx\, dy\, dz \\
&\quad \text{Coordenadas Esféricas,} \\
&\quad x = \rho\cos\theta\sin\phi\,, y = 2\rho\sin\theta\sin\phi\,, z = 3\rho\cos\phi \\
&\quad J = 6\rho^2\sin\phi\,, 0 \le \rho \le 1\,, 0 \le \phi \le \pi\,, 0 \le \theta \le 2\pi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 54\rho^4\cos^2\phi\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= 108\pi\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^4\cos^2\phi\sin\phi\, d\rho\, d\phi \\
&= \frac{108\pi}{5}\int_0^{\pi}\cos^2\phi\sin\phi\, d\phi \\
&= \frac{72\pi}{5}
\end{aligned}
$$

Logo:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N}\, dS = \frac{82\pi}{5}$$



MAT 2455 – Cálculo Diferencial e Integral para Engenharia III
Prova 3 – 18/06/2013 – Turma B

Questão 1.

(a) (1,5 pontos) Determine a massa da superfície S dada por $z = x^2 + y^2 + 2xy$ limitada por $x^2 + y^2 = 2$, sabendo que a densidade é dada por $\delta(x, y, z) = \dfrac{3x^2 + 2y^2}{\sqrt{1+8z}}$

(b) (1,5 pontos) Seja $\vec{F}(x, y, z) = (\cos^2 z, \cos^2 x, \sin z)$ e S a parte da superfície $y = \sin x + \cos z$ limitada por $z = 0$, $z = 2$, $x = -1$ e $x = 1$, orientada por $\vec{N}$ tal que $\vec{N}.\vec{j} < 0$ Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}.\vec{N}\, d\sigma$

Solução

(a) Uma parametrização para S é dada por $S(u, v) = (u, v, u^2+v^2+2uv)$, com $u^2+v^2 \leq 2$. Calculando os vetores tangentes em cada direção para calcular, em seguida, o vetor normal:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial u} &= (1, 0, 2u + 2v) \\
\frac{\partial S}{\partial v} &= (0, 1, 2u + 2v) \\
\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial u} &= (-2u - 2v, -2u - 2v, 1) \\
\left|\left|\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial u}\right|\right| &= \sqrt{8u^2 + 8v^2 + 16uv + 1}
\end{aligned}$$

A massa, obtida pela integral $M = \displaystyle\iint_S \delta(S(u, v)).\left|\left|\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial u}\right|\right|$ pode ser calculada:

$$\begin{aligned}
M &= \iint_D \frac{3u^2 + 2v^2}{\sqrt{8u^2 + 8v^2 + 16uv + 1}}.\sqrt{8u^2 + 8v^2 + 16uv + 1}\, du\, dv \\
&= \iint_D 3u^2 + 2v^2\, du\, dv \qquad\qquad \text{com } D = \{0 \leq u^2 + v^2 \leq 2\} \\
&\ \text{Utilizando coordenadas polares:} u = \rho\cos\theta, v = \rho\sin\theta, J = \rho, 0 \leq \rho \leq \sqrt{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} 2\rho^3 + \rho^3\cos^2\theta\, d\rho\, d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \frac{\rho^4}{2} + \frac{\rho^4}{4}\cos^2\theta \Big|_0^{\sqrt{2}} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2 + \cos^2\theta \, d\theta \\
&= 4\pi + \pi \\
&= 5\pi
\end{aligned}$$

(b) Uma parametrização para S é dada por $S(u,v) = (u, \sin u + \cos v, v)$, com $-1 \leq u \leq 1$ e $0 \leq v \leq 2$. Calculando os vetores tangentes em cada direção para calcular, em seguida, o vetor normal:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial u} &= (1, \cos u, 0) \\
\frac{\partial S}{\partial v} &= (0, -\sin v, 1) \\
\frac{\partial S}{\partial u} \wedge \frac{\partial S}{\partial u} &= (\cos u, -1, -\sin v)
\end{aligned}$$

Como $\vec{N}.\vec{j} < 0$, a normal pedida no enunciado corresponde com a utilizada.

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}.\vec{N}\, dS &= \int_0^2\int_{-1}^1 (\cos^2 v, \cos^2 u, \sin v).(\cos u, -1, -\sin v)\, du\, dv \\
&= \int_0^2\int_{-1}^1 \cos^2 v \cos u - \cos^2 u - \sin^2 v\, du\, dv \\
&= \int_0^2\int_{-1}^1 \cos^2 v \sin u - u\Big|_{-1}^1 dv \\
&= \int_0^2 (\frac{1}{2} + \frac{\cos 2v}{2}) 2\sin 1 - 2\, dv \\
&= \int_0^2 (\frac{v}{2} + \frac{\sin 2v}{4}) 2\sin 1 - 2v\Big|_0^2 \\
&= 2\sin 1 + \frac{\sin 4}{2}\sin 1 - 4
\end{aligned}$$

Questão 2. Seja γ a curva dada pela intersecção do parabolóide $z = x^2 + y^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 = 8$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário. Calcule $\int_\gamma \vec{F}.d\vec{r}$ nos segiuntes casos:

(a) (1,5 pontos) $\vec{F}(x, y, z) = \left(x - y, x - z + \frac{y^3}{3 + \sin y}, y\right)$

(b) (2,0 pontos) $\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{\cos z}{8 + z^4}\right)$

Solução

A curva γ é dada por $\gamma(t) = (\sqrt{8}\cos t, \sqrt{8}\sin t, 8)$

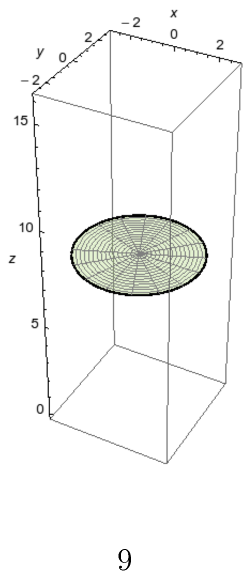
(a) O domínio do campo $\vec{F}$ é $\mathbb{R}^3$. Logo é possível escolher qualquer superfície para utilizar o Teorema de Stokes. Escolhendo o plano $z = 8$, com $x^2 + y^2 \leq 8$

Calculando o rotacional:

$$\text{rot}\vec{F} = (2, 0, 2)$$

Teorema de Stokes

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} &= \iint_S \text{rot}\vec{F}.\vec{n}\, dS \\
&= \iint_S (2, 0, 2).(0, 0, 1)\, dS \\
&= \iint_S 2\, dS \\
&= 2\text{Área}(S) \\
&= 16\pi
\end{aligned}$$

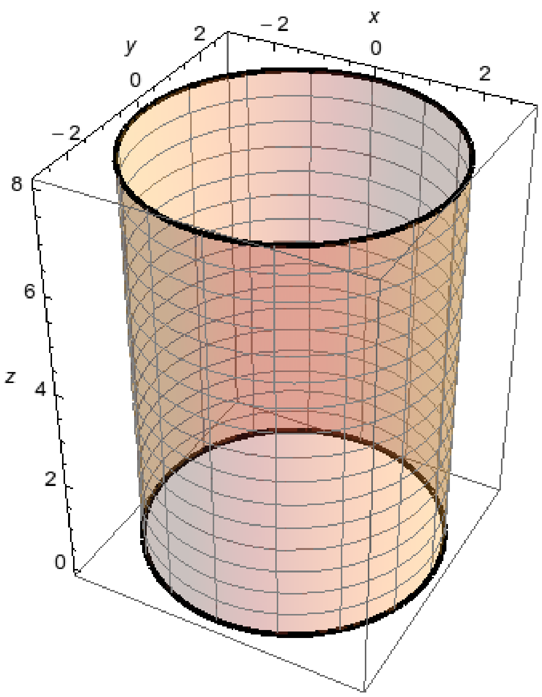


(b) Nesse caso, o domínio do campo $\vec{F}$ é Dom $\vec{F} = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,z)\}$. Com isso, é necessário escolher uma superfície limitada na qual não haja intersecções com o eixo z. Uma opção, é o cilindro $x^2 + y^2 = 8$. Para limitar a superfície, é necessário considerar uma curva α em $z = 0$, para, junto com γ, formar o bordo de S.

Teorema de Stokes
$$\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\vec{F}\, dS$$

Como $\text{rot}\vec{F} = 0$, é necessário calcular, apenas, a integral sobre a curva α. A curva γ induz uma orientação de vetor normal para dentro da superfície S. Baseado nisso, a orientação de α necessária será dada pela seguinte parametrização $\alpha(t) = (\sqrt{8}\sin t, \sqrt{8}\cos t, 0)$ com vetor tangente dado por $\alpha'(t) = (\sqrt{8}\cos t, -\sqrt{8}\sin t, 0)$

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\, d\vec{r} &= -\int_\alpha \vec{F}\, d\vec{r} \\
&= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{-\sqrt{8}\cos t}{8}, \frac{\sqrt{8}\sin t}{8}, 0 \right) .(\sqrt{8}\cos t, -\sqrt{8}\sin t, 0)\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} -1\, dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$



Questão 3. Calcule $\iint_S \vec{F}.\vec{N}\, d\sigma$, onde:

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + \frac{z^3}{3}\vec{k}$$

e S é a superfície $x^2 + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, orientada pela normal unitária exterior $\vec{N}$.

Solução

Dividindo o campo $\vec{F}$ em duas componentes $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, sendo que a primeira componente corresponde à primeira fração de $\vec{F}$ e a segunda componente, à segunda fração.

Calculam-se as integrais de fluxo separadamente para cada componente.

Cálculo para $\vec{F_1}$

Como o domínio de $\vec{F_1}$ é igual a $\mathbb{R} - \{(0,0,0)\}$, e a região interior à S contém a origem, isola-se a origem com uma pequena esfera (S_2) de raio r, cuja parametrização e vetor normal são dados por:

$$S_2(\theta,\phi) = (r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)$$

$$\vec{N} = r^2\sin\phi(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi)$$

Nota-se que esse vetor aponta na direção positiva do eixo z, logo, para o interior da região de integração R e no sentido contrário ao desejado. Basta inverter o sinal da integral, no Teorema de Gauss.

Como div$\vec{F_1}$=0, ao utilizar-se o Teorema de Gauss, o cálculo da integral de fluxo fica dado por:

$$\iint_S \vec{F_1}\,\vec{N}\,dS - \iint_{S_2} \vec{F_1}\,\vec{N}\,dS_2 = 0$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\,\vec{N}\,dS &= \iint_{S_2} \vec{F_1}\,\vec{N}\,dS_2 \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)}{r^3}.r^2\sin\phi(\cos\theta\sin\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\phi)\,d\phi\,d\theta \\
&= \pi\int_0^{\pi}\sin\phi\,d\phi \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Cálculo para $\vec{F_2}$

Como não há restrições no domínio de $\vec{F_2}$, basta aplicar o Teorema de Gauss diretamente, da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}.\vec{N}\, dS &= \iiint_R \operatorname{div}\vec{F}_2\, dx\, dy\, dz \\
&= \iiint_R z^2\, dx\, dy\, dz \\
&\ \text{Coordenadas Esféricas,} \\
&\ x = \rho\cos\theta\sin\phi\,, y = 3\rho\sin\theta\sin\phi\,, z = 2\rho\cos\phi \\
&\ J = 6\rho^2\sin\phi\,, 0 \le \rho \le 1\,, 0 \le \phi \le \pi\,, 0 \le \theta \le 2\pi \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 54\rho^4\cos^2\phi\sin\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta \\
&= 108\pi\int_0^{\pi}\int_0^1 \rho^4\cos^2\phi\sin\phi\, d\rho\, d\phi \\
&= \frac{108\pi}{5}\int_0^{\pi}\cos^2\phi\sin\phi\, d\phi \\
&= \frac{72\pi}{5}
\end{aligned}
$$

Logo:

$$\iint_S \vec{F}.\vec{N}\, dS = \frac{82\pi}{5}$$