Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
Prova 3 - 1º semestre de 2012

Questão 1:

(a) (1,5 ponto) Calcule a massa da superfície $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ limitada pelos planos $z = 2$ e $z = 4$, onde a densidade de massa é $\delta(x, y, z) = z$.

(b) (2 pontos) Calcule $\displaystyle\iint_S zx\, dy \wedge dz + \frac{zy}{2}\, dz \wedge dx + \frac{y^2}{2}\, dx \wedge dy$, onde

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 \leq 2x,\ z \geq 0\}$$

orientada pela normal $\vec{N}$ com $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$.

Solução:

(a) Como os dois planos estão em $z > 0$, temos que a superfície em questão é parte da parte superior do hiperbolóide de uma folha. Sendo assim, podemos escrever sua equação como $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$.
Assim podemos parametrizar a superície S da seguinte forma:

$$\sigma(u, v) = (u, v, \sqrt{u^2 + v^2 - 1})$$

Para encontrar os valores de (u, v) em que a superfície S é definida, realizamos a intersecção do hiperbolóide com cada um dos planos. Assim temos:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 5$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 17$$

Sendo assim, temos que a região R na qual a superfície S é definida é:

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 5 \leq u^2 + v^2 \leq 17\}$$

Calculando $\sigma_u \wedge \sigma_v$:

$$\sigma_u = \Big(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 - 1}}\Big)$$
$$\sigma_v = \Big(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 - 1}}\Big)$$
$$\sigma_u \wedge \sigma_v = \Big(-\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 - 1}}, -\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 - 1}}, 1\Big)$$
$$||\sigma_u \wedge \sigma_v|| = \sqrt{\frac{u^2}{u^2 + v^2 - 1} + \frac{v^2}{u^2 + v^2 - 1} + 1} = \sqrt{\frac{2u^2 + 2v^2 + 1}{u^2 + v^2 - 1}}$$

Sendo assim, aplicando a definição de integral de superfície de um campo escalar:

$$\iint_S z\,dS = \iint_R z(\sigma(u,v))||\sigma_u \wedge \sigma_v||\,du\,dv = \iint_R \sqrt{u^2+v^2-1}\cdot\sqrt{\frac{2u^2+2v^2-1}{u^2+v^2-1}}\,du\,dv$$

Realizando a seguinte mudança para coordenadas polares:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$$

$$|J| = \rho$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{17}} \rho\sqrt{2\rho^2-1}\,d\rho\,d\theta$$

Realizando uma mudança de variável: $w = 2\rho^2 - 1 \Rightarrow dw = 4\rho d\rho$

$$= \frac{1}{4}2\pi\int_9^{33}\sqrt{w}\,dw = \frac{1}{4}2\pi\frac{2w^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_9^{33} = \frac{\pi}{3}(33\sqrt{3}-27) = \pi(11\sqrt{33}-9)$$

(b) Como a superfície está em $z \geq 0$, temos que a superfície em questão é parte da parte superior de uma esfera. Sendo assim, podemos escrever sua equação como $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Assim podemos parametrizar a superície S da seguinte forma:

$$\sigma(u, v) = (u, v, \sqrt{4 - u^2 - v^2}),\ (u, v) \in R$$

$$R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leq 2u\}$$

Calculando $\sigma_u \wedge \sigma_v$:

$$\begin{aligned}
\sigma_u &= \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2 - 1}}\right) \\
\sigma_v &= \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2 - 1}}\right) \\
\sigma_u \wedge \sigma_v &= \left(\frac{u}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}, \frac{v}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}, 1\right)
\end{aligned}$$

Como $\sigma_u \wedge \sigma_v \cdot \vec{k} > 0$, a orientação do vetor normal está de acordo com o enunciado. Sendo assim, aplicando a definição de integral de superfície de um campo vetorial:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_R \vec{F}(\sigma(u, v)) \cdot \sigma_u \wedge \sigma_v\, du\, dv = \iint_R (u^2 + v^2)\, du\, dv$$

Realizando a seguinte mudança para coordenadas polares:

$$\begin{cases} u = \rho \cos\theta \\ v = \rho \sin\theta \end{cases}$$

$$|J| = \rho$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \rho \cdot \rho^2\, d\rho\, d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{2\cos\theta} d\theta = 4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta$$

Como o integrando é uma função par e o intervalo de integração é simétrico:

$$= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2\cos(2\theta) + \cos^2(2\theta))\, d\theta$$

$$= 2\left[\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\frac{\sin(2\theta)}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(4\theta)}{2}\, d\theta\right] = \left[\frac{\pi}{2} + 0 + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(4\theta)}{4}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)\right] = 2\frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

OBS: Outra mudança de variável pode ser $u = \cos x + 1$ e $v = \sin x$

Questão 2. (3 pontos) Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$ onde $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{(x,y,z)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3}$ e S é parte da superfície $x^2+y^2=(z+1)^2$ entre $z=0$ e $z=2$, orientada de modo que $\vec{N}\cdot\vec{k}>0$.

Solução:

Calculamos primeiro que $div(\vec{F})=0$, o que sugere o uso do teorema da divergência de Gauss. Observe porém que o campo $\vec{F}$ tem uma singularidade no ponto origem $(0,0,0)$, portanto só poderemos usar o dito teorema em uma região que não contenha esse ponto. Logo consideremos a região

$$U = \{(x,y,z)\in^3 \mid x^2+y^2+z^2\geq 0,\ x^2+y^2\leq (z+1)^2,\ \ z\leq 2\}.$$

Pelo teorema da divergência temos

$$\iint_{\partial U}\vec{F}\cdot\vec{N}dS = \iiint_U div(\vec{F})dV = 0,$$

onde ∂U denota a fronteira de U, orientada com o normal unitário exterior. Tal fronteira decompõe-se em três partes: $\partial U = S\cup S_2\cup S_3$, onde S é a superfície do enunciado, porém com orientação oposta,

$$S_2 := \{(x,y,z)\in^3 \mid z\geq 0,\ x^2+y^2+z^2=1\},$$

orientada de modo que $\vec{N}=(-x,-y,-z)$, e

$$S_3 := \{(x,y,z)\in^3 \mid z=2,\ x^2+y^2\leq 9\},$$

orientada de modo que $\vec{N}=\vec{k}$.

Em S_2, temos

$$\vec{F}.\vec{N} = \frac{-x^2-y^2-z^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = -1,$$

de modo que

$$\iint_{S_2}\vec{F}\cdot\vec{N}dS = -\iint_{S_2} dS = -\text{Area}(S_2) = -2\pi.$$

Por outro lado, em S_3,

$$\vec{F}.\vec{N} = \frac{z}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3} = \frac{2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+4}\right)^3},$$

de modo que, denotando por D o disco planar de raio 3 e usando coordenadas polares,

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3}\vec{F}\cdot\vec{N}dS &= \iint_D \frac{2}{\left(\sqrt{x^2+y^2+4}\right)^3}dxdy \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^3 \frac{2r}{\left(\sqrt{r^2+4}\right)^3}dr \\
&= -4\pi(r^2+4)^{-1/2}\Big|_{r=0}^{3} \\
&= 4\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{13}}\right).
\end{aligned}$$

Concluimos, lembrando que o normal exterior em S é oposto ao do enunciando,

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS &= \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{N} dS + \iint_{S_3} \vec{F} \cdot \vec{N} dS \\
&= -2\pi + 4\pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{13}} \right) \\
&= -\frac{4\pi}{\sqrt{13}}.
\end{aligned}$$

Questão 3. (3,5 pontos)

Calcule o trabalho realizado pelo campo $\vec{F}$ ao longo de γ, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(-y\frac{(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2}, x\frac{(x^2+y^2+1)}{x^2+y^2}, (z-1)\cos^7 z\right)$$

e γ é a curva dada pela intersecção de $4x^2+y^2=4$ e $z=y+3$, orientada de forma que a projeção no plano xy é percorrida no sentido anti-horário.

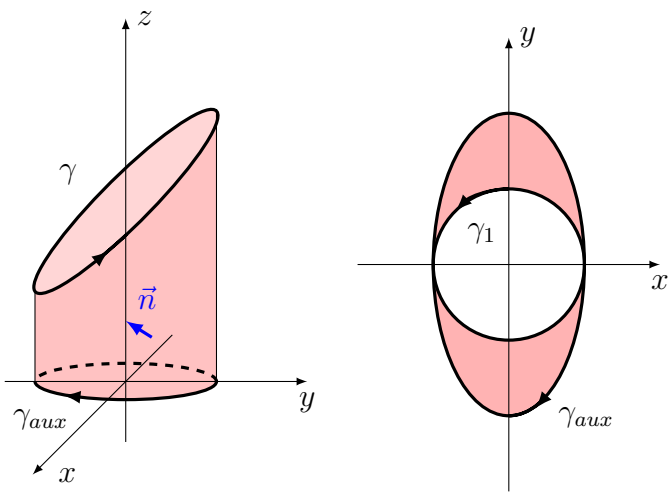
Solução:

Observamos inicialmente que calcular este trabalho diretamente "dá um trabalhão".

A idéia então é usar o teorema de Stokes e trocar a integral de linha que define o trabalho pelo fluxo do rotacional de $\vec{F}$ através de alguma superfície que tenha γ como bordo. A superfície mais natural nessas condições é a porção do plano $z=y+3$ que é limitada por γ, porém o campo vetorial $\vec{F}$ não está definido sobre o eixo dos z e a curva γ, uma elipse no plano $z=y+3$, dá uma volta em torno deste eixo.

Como o domínio de $\vec{F}$ não é simplesmente conexo, não existe nenhuma superfície que tenha γ como *única* componente em seu bordo. Em vista disso procuramos uma superfície tal que γ seja *uma* das componentes de seu bordo.

Considerando a expressão do campo uma boa escolha de superfície S é o cilindro elíptico dado por $4x^2+y^2=4$, limitado pelos planos $z=0$ e $z=y+3$. A fim de manter as orientações compatíveis com as do enunciado do teorema de Stokes, orientamos este cilindro pela normal que "aponta para dentro" dele e a segunda componente de seu bordo, a curva γ_{aux}, no sentido horário, como ilustrado na figura 1(a).



(a) Superfície S e seu bordo (b) As curvas γ_{aux} e γ_1

Figura 1: Representação geométrica do problema

Com estas orientações fixadas, temos

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_{aux}} \vec{F}\cdot d\vec{r}. \tag{1}$$

Calculemos então $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ e $\displaystyle\int_{\gamma_{aux}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$:

1. Cálculos diretos mostram que $\operatorname{rot}\vec{F} = (0,0,2)$ e uma parametrização para a superfície é $\sigma(u,v) = (\cos u, 2\sin u, v)$, com $0 \le u \le 2\pi$ e $0 \le v \le 2\sin u + 3$, donde temos o campo normal unitário a S dado por

$$\vec{n} = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = (*,*,0),$$

e portanto $\operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n} = 0$, donde $\displaystyle\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 0$.

2. Para calcular $\displaystyle\int_{\gamma_{aux}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ podemos prosseguir diretamente. A curva γ_{aux}, percorrida no sentido horário, pode ser parametrizada por $\gamma_{aux}(t) = (\sin t, 2\cos t, 0)$, com $0 \le t \le 2\pi$ e portanto $\gamma'_{aux}(t) = (\cos t, -2\sin t, 0)$ e então

$$\int_{\gamma_{aux}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}\big(\gamma(t)\big)\cdot\gamma'(t)\,dt = -2\int_0^{2\pi} 1 + \frac{1}{1+3\cos^2(t)}\,dt = -6\pi.$$

Substituindo os resultados acima na equação (1) temos

$$0 = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} - 6\pi,$$

donde $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi$.

Alternativamente, lembrando que a área de uma elipse de semi-eixos a e b é πab, podemos aplicar novamente o teorema de Stokes (ou de Green, restringindo-nos às duas primeiras coordenadas do campo $\vec{F}$) na região D destacada na figura 1(b) obtendo

$$-\iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{k}\,dxdy = \int_{\gamma_{aux}} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}.$$

Mas

$$\begin{aligned}\iint_D \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{k}\,dxdy &= 2\text{Área}(D) = 2(2\pi-\pi) = 2\pi;\\ \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} &= 4\pi,\end{aligned}$$

o que pode ser obtido calculando-se diretamente a última integral. Logo $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi$.