Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
Prova 3 - 1o. Semestre de 2011

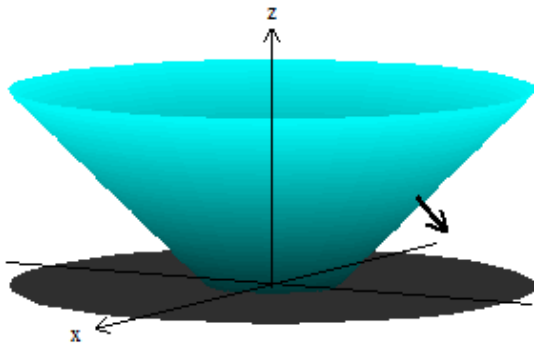
As resoluções são referentes às questões enunciadas na turma A.

1ª Questão (4 pontos)
a) Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS$ onde $\vec{F}(x,y,z) = (xy, x^2, \ln(x^2+y^2))$ e S é a parte da superfície $(z+1)^2 = x^2+y^2$ para $0 \le z \le 3$, orientada de modo que $\vec{N}$ é tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} < 0$.

b) Calcule a massa da superfície S definida como sendo a parte da superfície $x^2+y^2+z^2 = 2z$ satisfazendo $z \ge \dfrac{3}{2}$ e densidade de massa $\delta(x,y,z) = z^2$.

Solução

a) Uma parametrização natural de S é $X(u,v) = (u\cos v, u\ \text{sen}\ v, u-1)$ onde $u \in [1,4]$ e $v \in [0,2\pi]$.



Calculemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u} &= (\cos v,\ \text{sen}\ v, 1)\\ \frac{\partial X}{\partial v} &= (-u\ \text{sen}\ v, u\cos v, 0)\end{aligned}$$

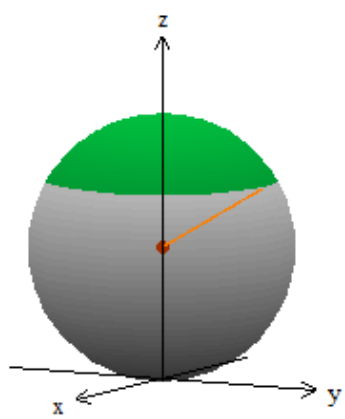
Observe que

$$\left(\frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v}\right)\cdot\vec{k} > 0,$$

isto é, a orientação induzida pela parametrização $X(u,v)$ é contrária à que queremos usar para calcular o fluxo. Por isso aperece um sinal 'menos' na seguinte conta:

$$
\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N}\,dS &= -\int_{u=1}^{4}\int_{v=0}^{2\pi} \det\left(\vec{F}(X), \frac{\partial X}{\partial u}, \frac{\partial X}{\partial v}\right) du\,dv \\
&= -\int_{u=1}^{4}\int_{v=0}^{2\pi} u\ln(u^2) du\,dv \\
&= -2\pi\int_{u=1}^{4} u\ln(u^2), du \\
&= -\pi\int_{t=1}^{16} \ln\,t, dt \\
&= -\pi\left[t\ln t - t\right]_{t=1}^{2} \\
&= -\pi(16\ln 16 - 16 - (0-1)) \\
&= \pi(15 - 16\ln 16).
\end{aligned}
$$

b) Uma possível parametrização de S é $X(u,v) = (\sqrt{1-u^2}\,\cos\,v, \sqrt{1-u^2}\,\text{sen}\,v, u+1)$ onde $u \in [1/2, 1]$ e $v \in [0, 2\pi]$.



Calculemos

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial u} &= \left(-\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\cos\,v, -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\,\text{sen}\,v, 1\right), \\
\frac{\partial X}{\partial v} &= \left(-\sqrt{1-u^2}\,\text{sen}\,v, \sqrt{1-u^2}\cos\,v, 0\right).
\end{aligned}
$$

Logo temos

$$
dS = ||\frac{\partial X}{\partial u}\wedge\frac{\partial X}{\partial v}||du\,dv = du\,dv
$$

e portanto

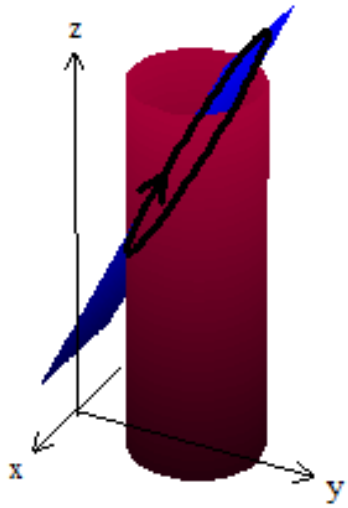
$$\begin{aligned} M &= \iint_S \delta(X(u,v))du\,dv \\ &= \int_{u=1/2}^{1}\int_{v=0}^{2\pi}(u+1)^2 du\,dv \\ &= 2\pi\left[\frac{(u+1)^3}{3}\right]_{u=1/2}^{1} \\ &= \frac{2\pi}{3}(8-\frac{27}{8}) = \frac{37\pi}{12}. \end{aligned}$$

2ª Questão (3 pontos) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ sendo

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{y-2}{x^2+(y-2)^2} + xz - 2y,\ \frac{-x}{x^2+(y-2)^2} + yz + 2x,\ \frac{\cos(z^2)}{\ln(2+z^6)}\right)$$

e γ é a curva dada pela intersecção de $x^2+(y-2)^2 = 4$ e $z = 2y+1$ orientada de modo que sua projeção em Oxy é percorrida no sentido anti-horário.

Solução



Usaremos o Teorema de Stokes com a superfície

$$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 |\, x^2+(y-2)^2 = 4,\ 0\le z\le 2y+1\},$$

orientada de modo que $\vec{N}(x,y,z) = (x, y-2, 0)$.

Primeiramente calculamos que $\vec{rot}(\vec{F}) = (-y, x, 4)$. Assim temos $\vec{N}.\vec{rot}(\vec{F}) = -2x$. Já que a função $f(x,y,z) = -2x$ é ímpar e que a superfície S é invariante pela simetria $x \mapsto -x$, temos que $\displaystyle\iint_S \vec{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N}\, dS = 0$

Podemos também encontrar esse resultado fazendo a conta explícita, por exemplo parametrizando S por $X(u,v) = (2\cos u, 2\ \text{sen}\ u + 2, v)$, com $u \in [0, 2\pi]$ e $0 \leq v \leq 4\ \text{sen}\ u + 3$. Já que $dS = du\, dv$, deduzimos

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N}\, dS &= \int_{u=0}^{2\pi} \int_{v=0}^{4\ \text{sen}\ u+5} -4\cos u\, du\, dv \\
&= -4 \int_{u=0}^{2\pi} \cos u(4\ \text{sen}\ u + 5) du \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por outro lado, as duas componentes conexas da fronteira de S são a curva γ e a curva γ_1 parametrizada por $\gamma_1(t) = (2\cos t, 2\ \text{sen}\ t + 2, 0)$, com $t \in [0, 2\pi]$. Já que

$$\gamma_1'(t) = (-2\ \text{sen}\ t, 2\cos t, 0)$$

e

$$\vec{F}(\gamma_1(t)) = (-\frac{7}{2}\ \text{sen}\ t - 4, \frac{7}{2}\cos t, \frac{1}{\ln 2}),$$

temos,

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{t=0}^{2\pi} (7 + 8\ \text{sen}\ t) dt \\
&= 14\pi.
\end{aligned}$$

Tomando em conta que a orientação em γ_1 que aperece no enunciado do teorema de Stokes é aquela oposta à usada na conta anterior, concluimos que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \vec{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N}\, dS$$

e logo

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 14\pi.$$

3ª Questão (3 pontos) Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS$ onde

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} + (x, 0, 0)$$

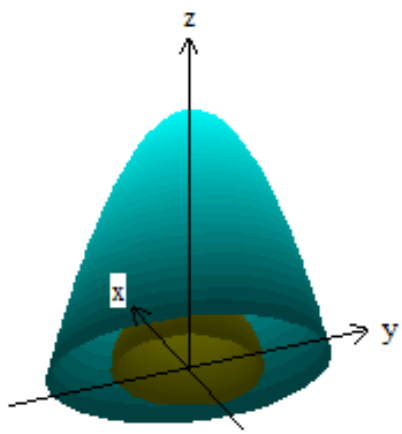
e S é parte da superfície $z = 4 - 2x^2 - y^2$ com $z \geq 0$, orientada de modo que $\vec{N}$ é tal que $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$.

Solução

Temos $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ com

$$\vec{F_1} = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \qquad \text{e} \qquad \vec{F_2} = (x, 0, 0).$$

Observe que $div(\vec{F_1}) = 0$ e $div(\vec{F_2}) = 1$, o que sugere o uso do teorema da divergência de Gauss. Observe porém que o campo $\vec{F_1}$ não está definido no ponto origem $(0, 0, 0)$, portanto só poderemos usar o dito teorema com $\vec{F_1}$ em uma região que não contenha esse ponto.



Logo considere a região

$$R_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, z \geq 0,\, z \leq 4 - 2x^2 - y^2,\, z \geq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}.$$

As três partes da fronteira de R são Se as duas superfícies

$$S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, z = 0,\, x^2 + y^2 \geq 1,\, 2x^2 + y^2 \leq 1\}$$

orientada de modo que $\vec{N} = -\vec{k}$, e

$$S_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, z \geq 0\},$$

orientada de modo que $\vec{N} = (-x, -y, -z)$.

Já que em $\vec{F_1}$ é horizontal para $z = 0$, temos que $\vec{F_1}.\vec{N} = 0$ em S_2, e assim $\displaystyle\iint_{S_2} \vec{F_1} \cdot \vec{N} dS = 0$. Além disso, em S_3, temos $\vec{F_1}.\vec{N} = -1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F_1} \cdot \vec{N} dS &= -\iint_{S_3} \vec{F_1} \cdot \vec{N} dS \\
&= -\iint_{S_3} (-1) dS \\
&= \text{Area}(S_3) \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

Para calcular $\iint_S \vec{F}_2 \cdot \vec{N} dS$, usamos ainda o teorema da divergência. Já que o campo $\vec{F}_2$ anula-se em $z = 0$, temos que

$$\iint_S \vec{F}_2 \cdot \vec{N} dS = \iiint_{R_2} div(\vec{F}_2) dV = \mathrm{Vol}(R_2),$$

onde

$$R_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, 0 \leq z \leq 1 - 2x^2 - y^2\}.$$

O volume de R obtem-se usando por exemplo o sistema de coordenadas $X(u, v, w) = (\frac{u}{\sqrt{2}} \cos v, u \text{ sen } v, w)$. Assim, sendo que $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{u}{\sqrt{2}}$, temos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(R_2) &= \int_{u=0}^{1} \int_{v=0}^{2\pi} \int_{w=0}^{1-u^2} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} du \, dv \, dw \\
&= 2\pi \int_{u=0}^{1} (1 - u^2) \frac{u}{\sqrt{2}} du \\
&= \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^4}{4} \right]_{u=0}^{1} \\
&= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Em conclusão,

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} dS &= \iint_S \vec{F}_1 \cdot \vec{N} dS + \iint_S \vec{F}_2 \cdot \vec{N} dS \\
&= 2\pi + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$