**Instituto de Matemática e Estatística da USP**
**MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia**
**$3^a$ Prova - $1^o$ semestre de 2006**

**Turma B**

**Questão 1.** (2,5 pontos) Calcule

$$\int_\gamma (e^{x^2} + y)dx + (y^2 ln(1+y^4) + x^2)dy + e^{z^2}dz$$

onde $\gamma$ é a intersecção da esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ com o plano $z = 2 + y$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido anti-horário.

**Solução:** Veja Fig. 1 para os cálculos.

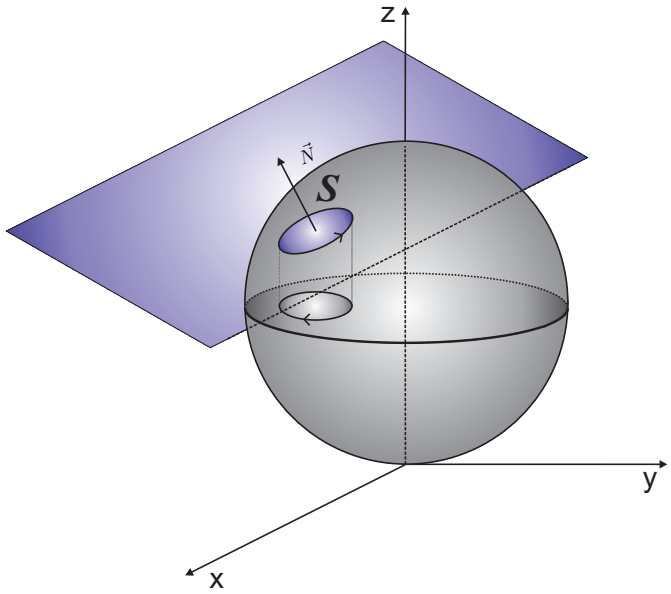


Figura 1: **Superfície $S$.**

Sendo $\vec{F}(x,y,x) = (e^{x^2} + y, y^2 ln(1+y^4) + x^2, e^{z^2})$, cujo rotacional é dado por $rot\vec{F} = (0,0,2x-1)$, então o exercício pede que seja calculado $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Uma parametrização possível para o plano do enunciado seria:

$$X(x,y) = \begin{cases} x(x,y) = x \\ y(x,y) = y \\ z(x,y) = 2 + y \end{cases}$$

com $(x,y) \in D$ e cujo vetor normal é dado por $\vec{X}_x \wedge \vec{X}_y = (0,-1,1)$, que é compatível com a orientação induzida pela curva $\gamma$, uma vez que $(\vec{X}_x \wedge \vec{X}_y) \cdot \vec{k} = 1 > 0$.

A região D corresponde à projeção da intersecção da esfera com o plano sobre o plano xy e pode ser obtida substituindo $z = 2 + y$ (equação do plano) em $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ (equação da esfera):

$$x^2 + y^2 + (2+y)^2 = 3 \;\Rightarrow\; x^2 + 2y^2 - 4y = -1 \;\Rightarrow\; x^2 + 2(y+1)^2 = 1$$

Portanto, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2(y+1)^2 \leq 1\}$. E, sendo S a superfície correspondente à parte do plano interna à esfera, a parametrização de S é dada por $X(x,y)$ e D. Dessa forma, pode-se aplicar o Teorema de Stokes para calcular a integral pedida:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iint_D (2x-1)dxdy$$

O cálculo da integral acima pode ser finalizado através do uso de coordenadas polares $T : \begin{cases} x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y(r,\theta) = -1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} r \sin\theta \end{cases}$ com $(r,\theta) \in D_{r\theta} = [0,1] \times [0, 2\pi]$:

$$\iint_D (2x-1)dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (2r\overbrace{\cos\theta}^{=0} - 1).\frac{\sqrt{2}r}{2} dxdy = -2\pi \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 = -\pi\frac{\sqrt{2}}{2}$$

**Questão 2.** (2,5 pontos) Calcule

$$\iint_S 2zdy \wedge dz + x^7\sqrt{z^9+9}dz \wedge dx + (y+z)dx \wedge dy$$

onde S é a parte da superfície $z = x^2 + 2y^2$, limitada pelo plano $z = 3$, orientada com a normal unitária $\vec{N}$ que satisfaz $\vec{N} \cdot \vec{k} > 0$.

**Solução:**Análoga a Questão 2 da Turma A (é só substituir $x$ por $y$). Rpta. $\frac{-9}{4}\sqrt{2}\pi$.

**Questão 3.** (2,5 pontos) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F}(x,y,z) = \left( \frac{-y}{x^2+y^2} + yz, \frac{x}{x^2+y^2}, \arctan(z^2) \right)$$

e $\gamma$ é a intersecção das superfícies $x^2 + y^2 = 9$ e $z = x + 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido horário.

**Solução:**

O campo vetorial $\vec{F}$ pode ser interpretado como uma soma de dois outros campos $\vec{F_1} = \left(\dfrac{-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x}{x^2+y^2}, 0\right)$ e $\vec{F_2} = (yz, 0, \arctan z^2)$, o que leva a:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F_1} \cdot d\vec{r} + \int_\gamma \vec{F_2} \cdot d\vec{r}$$

Agora sejam S a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 9$ entre o plano $z = 0$ (plano xy) e a curva $\gamma$ com orientação dada pela normal $\vec{N}(x, y) = \dfrac{1}{3}(x, y, 0)$, e $\tilde{\gamma}$ a curva dada pela intersecção do cilindro com o plano xy, orientada no sentido anti-horário (veja Fig. 2).

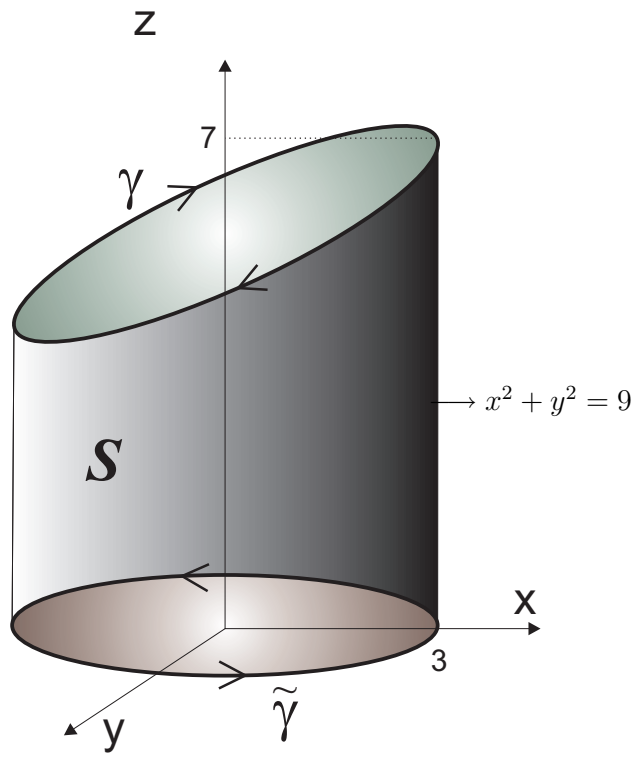


Figura 2: **Superfície $S$.**

Como $rot\vec{F} = (0, y, -z)$, no cilindro, tem-se que $rot\vec{F} \cdot \vec{N} = \dfrac{1}{3}y^2$ e, pelo Teorema de Stokes, vem que:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint \frac{1}{3} y^2 d\sigma$$

Para a curva $\tilde{\gamma}$, tem-se que

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F_1} \cdot d\vec{r} + \int_{\tilde{\gamma}} \vec{F_2} \cdot d\vec{r} = 2\pi + 0 = 2\pi$$

E, para o cálculo da integral de superfície, pode-se fazer a seguinte mudança de coordenadas:

$$S : \begin{cases} x(\theta, z) = 3\cos\theta \\ y(\theta, z) = 3\sin\theta \\ z(\theta, z) = z \end{cases} \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ e } 0 \leq z \leq 3\cos\theta + 4, \text{ o que leva a:}$$

$$\iint \frac{1}{3}y^2 d\sigma = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{3\cos\theta+4} 9\sin^2\theta . 3 dr d\theta = 9\int_0^{2\pi} \sin^2\theta . (\overbrace{3\cos\theta}^{=0} + 4) d\theta = 36\int_0^{2\pi} \sin^2\theta d\theta = 36\pi$$

Portanto, $\displaystyle\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + 2\pi = 36\pi \implies \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = 34\pi.$

**Questão 4.** (2,5 pontos) Seja $\vec{F}$ o campo $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$, onde $\vec{r}(x, y, z) = (x, y, z)$. Calcule $\displaystyle\iint_S \vec{F}\cdot\vec{N} d\sigma$, onde S é a parte do parabolóide $z = 3 - x^2 - y^2$, com $0 \leq z \leq 3$, orientada de modo que $\vec{N}\cdot\vec{k} > 0$.

**Solução:** Veja a Fig. 3 para os cálculos.

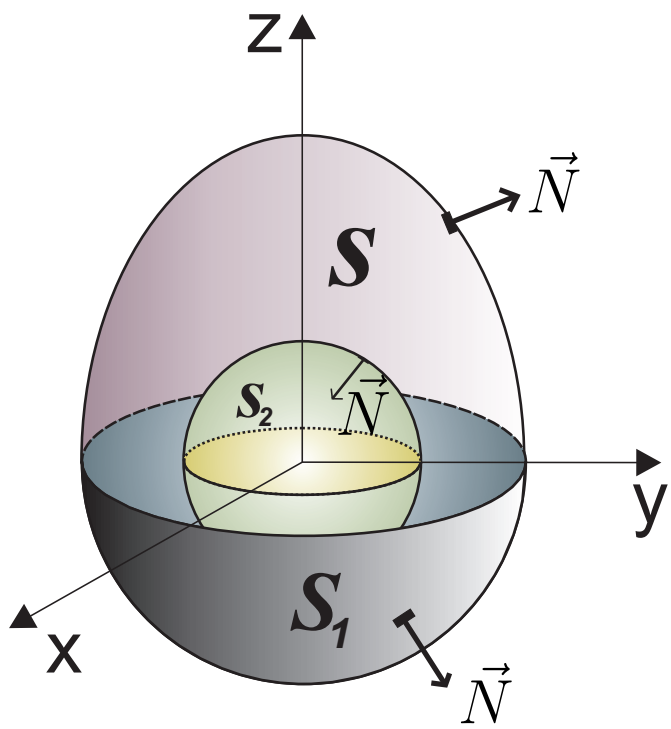


Figura 3: **Superfície $S$.**

Sejam $S_1$ a parte da esfera de centro na origem e raio $\sqrt{3}$ contida no semi-espaço $z \leq 0$ com normal apontando para fora e $S_2$ a esfera de centro na origem e raio 1, com normal apontando para o interior. Seja agora R a região externa a $S_2$ e interna a $S \cup S_1$.

Como $div\vec{F} = 0$ em $\Omega = \mathbb{R}^3 - (0,0,0)$ e $\Omega \supset R$, segue, pelo Teorema de Gauss, que:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma + \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iiint_R \overbrace{div\vec{F}}^{=0} dxdydz = 0$$

Agora, para $S_1$, a normal externa é dada por $\vec{N} = \dfrac{\vec{r}}{\mid \vec{r} \mid}$ e a integral fica:

$$\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iint_{S_1} \frac{\vec{r}}{\mid \vec{r} \mid^3} \cdot \frac{\vec{r}}{\mid \vec{r} \mid} d\sigma = \iint_{S_1} \frac{1}{\mid \vec{r} \mid^2} d\sigma = \frac{1}{3} \iint_{S_1} \sigma = \frac{1}{3} . Área\ de\ S_1 = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} . 4\pi(\sqrt{3})^2 = 2\pi$$

Analogamente, para $S_2$, tem-se que $\vec{N} = \dfrac{-\vec{r}}{\mid \vec{r} \mid}$ e, portanto:

$$\iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \iint_{S_2} \frac{\vec{r}}{\mid \vec{r} \mid^3} \cdot \frac{-\vec{r}}{\mid \vec{r} \mid} d\sigma = -\iint_{S_2} \sigma = -Área\ de\ S_2 = -4\pi 1^2 = -4\pi$$

Finalmente, tem-se que:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = -\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma - \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = -(2\pi) - (-4\pi) = 2\pi$$