Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
3ª Prova - 1° semestre de 2004

Turma A

Questão 1. (3 pontos) Calcule $\displaystyle\iint_S \frac{y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS$, onde S é a parte do parabolóide $z = 4 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 2y$.

Solução:

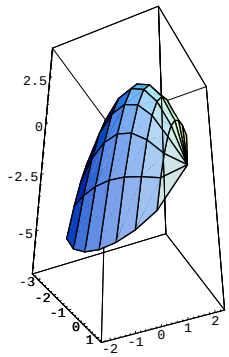

Figura 1. Gráfico de S .

Do enunciado, conclui-se que $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}$. Assim, $(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \begin{cases} z = 4 - x^2 - y^2 \\ 2y \leq 4 - x^2 - y^2 \end{cases}$

Agora, como $2y \leq 4 - x^2 - y^2 \Leftrightarrow x^2 + (y + 1)^2 \leq 5$, vem que

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 5 \ e \ z = 4 - x^2 - y^2\},$$

que corresponde ao gráfico de $f : D \to \mathbb{R}$, definida por $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y + 1)^2 \leq 5\}$.

Segue, pois, que uma parametrização possível de S seria:

$$\Gamma(u, v) = \begin{cases} x(u, v) = u \\ y(u, v) = v \\ z(u, v) = 4 - u^2 - v^2 \end{cases}$$

com $(u, v) \in D$.

Para essa parametrização, tem-se que $\| \Gamma_u \wedge \Gamma_v \| = \sqrt{1 + 4u^2 + 4v^2}$.

Assim sendo,

$$\alpha = \iint_S \frac{y^2}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}dS = \iint_D \frac{v^2}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}.\sqrt{1+4u^2+4v^2}dudv = \iint_D v^2 dudv$$

Fazendo mudança de variável (coordenadas polares):

$$T : \begin{cases} u(r, \theta) = r\cos\theta \\ u(r, \theta) = -1 + r\sin\theta \end{cases}$$

com $(r,\theta) \in \tilde{D} = [0,\sqrt{5}] \times [0,2\pi]$, vem que:

$$\alpha = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}} (-1 + r.\cos\theta)^2.rdrd\theta = \int_0^{\sqrt{5}} (2\pi.r + \pi.r^3)dr = \frac{45\pi}{4}$$

Questão 2. (3,5 pontos) Calcule $\iint_S \vec{v}.\vec{n}dS$, onde $\vec{v}(x,y,z) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(x,y,z)$ e S é a parte do hiperbolóide $x^2+y^2 = 4+z^2$, entre $z=0$ e $z=3$, unido com a sua tampa no plano $z=3$. Oriente S com a normal apontando para fora da região limitada pelo hiperbolóide e os planos $z=0$ e $z=3$.

Solução:

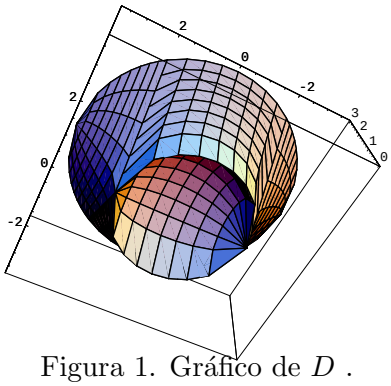

Figura 1. Gráfico de D .

Sejam $S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 4 \ e \ z \geq 0\}$, orientada com $\vec{n}$ interior à região limitada pela esfera de centro (0,0,0) e raio 2, e

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \geq 4,\ 0 \leq z \leq 3 \ e \ x^2+y^2 \leq 4+z^2\}.$$

Então $\partial D = S \cup S_1$.

Assim, pelo Teorema de Green, tem-se que:

$$\iiint_D div(\vec{v})\ dxdydz = \iint_{\partial D} \vec{v}.\vec{n}dS = \iint_S \vec{v}.\vec{n}dS + \iint_{S_1} \vec{v}.\vec{n}dS.$$

Ora, como $div(\vec{v}) = 0$, para $(z,y,z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, vem que

$$\iiint_D div(\vec{v})dxdydz = \iiint_D 0dxdydz = 0$$

Adotando $\Gamma(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = 2\sin v\cos u \\ y(u,v) = 2\sin v\cos u \\ z(u,v) = 2\cos u \end{cases}$, com $(u,v) \in R = [0,2\pi] \times [0,\frac{\pi}{2}]$ como uma parametrização de S_1 e lembrando que, nesse caso, $\Gamma_u \wedge \Gamma_v = 4(-\sin v^2\cos u, -\sin v^2 \sin u, -\cos u)$, cuja orientação é compatível com aquela proposta pelo enunciado, pois $(\Gamma_u \wedge \Gamma_v)\cdot\vec{k} \leq 0$. Daí,

$$\iint_{S_1} \vec{v}.\vec{n}dS = \iint_R \frac{1}{4^{3/2}} 2(\sin v\cos u, \sin v\sin u.\cos u)\cdot 4(-\sin v^2\cos u, -\sin v^2\sin u, -\cos u)dudv =$$

$$= -\iint_R \sin v dudv = 2\pi\cos v\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -2\pi$$

Finalmente, $0 = \iint_S \vec{v}.\vec{n}dS + (-2\pi) \implies \iint_S \vec{v}.\vec{n}dS = 2\pi.$

Questão 3. (3,5 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2} + y\right)\vec{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\vec{j} + \sin z^3 \vec{k}$ e γ é a interesecção do plano $x+y+z=4$ com o cilindro $x^2+y^2=1$, orientada de modo que a sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido horário.

Solução:

Sejam γ_0 a intersecção entre o cilindro $x^2+y^2=1$ e o plano $z=0$ e S a parte do cilindro compreendida entre os planos $z=0$ e $x+y+z=4$. Orientando S de acordo com a normal exterior ao cilindro e γ_0 com o sentido anti-horário de percurso, nota-se que $\gamma \cup \gamma_0 = \partial S$ tem orientação induzida por S. Assim, pelo Teorema de Stokes:

$$\iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}dS = \int_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Agora, como $rot(\vec{F}) = (0,0,-1), para\ (x,y,z) \in \Omega = \mathbb{R}^3 - eixo\ z$ e

$$\vec{n}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x,y,0),\ para\ (x,y,z) \in \Omega,$$

vem que $\iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}dS = \iint_S 0dS = 0.$

Em relação a integral de linha, adotamos: $\lambda(t) = (\cos t, \sin t, 0); t \in [0, 2\pi]$ como uma parametrização de γ_0, que a percorre no sentido anti-horário, então:

$$\int_{\gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \vec{F}(\lambda(t)) \cdot \lambda'(t)dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\sin t + \sin t, \cos t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)dt = \int_0^{2\pi} \cos t^2 dt = \pi$$

Conclui-se, portanto, que

$$0 = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}dS = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} + \pi \implies \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\pi.$$