**MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia**
**$3^a$ Prova - $1^o$ semestre de 2003**

**Questão 1. (Turma A)** Calcule

$$\int\int_S x^2 + y^2 \, dS$$

onde $S$ é a parte do parabolóide $z = 7 - x^2 - y^2$ com $3 \leq z \leq 6$.

**Solução:** Parametrizamos a superfície com $\sigma(r, \theta) = (r\cos\theta, r\text{sen}\,\theta, 7 - r^2)$, onde $1 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

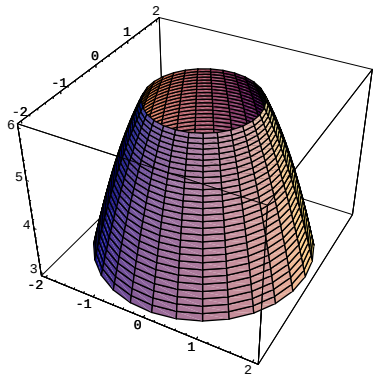

Figura 1: Superfície $S$.

Segue que

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & -2r \\ -r\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (2r^2\cos\theta, 2r^2\text{sen}\,\theta, r)$$

E então $|\sigma_r \wedge \sigma_\theta| = r\sqrt{4r^2+1}$. Logo

$$\int\int_S x^2 + y^2 \; dS = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2 r\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta = 2\pi\int_1^2 r^3\sqrt{4r^2+1}\, dr = 2\pi\int_5^9 \frac{u-1}{4}\sqrt{u}\,\frac{1}{8}\, du =$$
$$\tfrac{\pi}{16}\left(\tfrac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_5^9 = \tfrac{\pi}{16}\left(\tfrac{2}{5}(9^{\frac{5}{2}} - 5^{\frac{5}{2}}) - \tfrac{2}{3}(9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}})\right) = \tfrac{\pi}{16}\left(\tfrac{2}{5}(243 - 25\sqrt{5}) - \tfrac{2}{3}(27 - 5\sqrt{5})\right)$$

onde usamos a substituição $u = 4r^2 + 1$ para poder integrar.

**Questão 2. (Turma A)** Calcule

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

onde $\vec{F}(x,y,z) = xy^2\,\vec{i} + xyz\,\vec{j} + (z^2 - y^2z - \frac{1}{2}xz^2 + 1)\vec{k}$, e $S$ é a superfície $x^2+y^2+z^2=1$ com $z \geq 0$, orientada pela normal $\vec{n}$ que satisfaz $\vec{n}\cdot\vec{k} \geq 0$.

**Solução:**

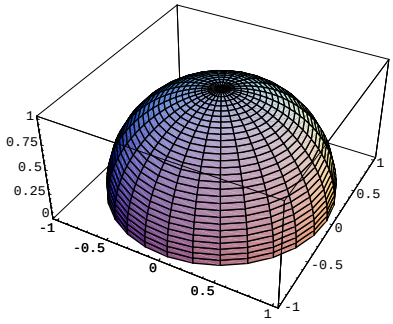


Figura 2: Superfície $S$.

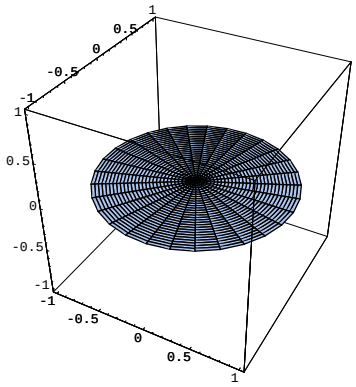


Figura 3: Tampa $T$.

Seja $\overline{S}$ a superfície lisa por partes com traço dado por $S \cup T$, onde $T$ é a tampa que fecha a semiesfera. Assim $R$ é a região limitado por $S$ e $T$. Agora oriente $T$ com a normal $-\vec{k}$, logo pelo Teorema de Gauss aplicado a $\overline{S}$ temos,

$$\int\int_{\overline{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int\int\int_R \text{div}\,\vec{F}\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_R y^2 + xz + 2z - y^2 - xz\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int\int\int_R 2z\,dx\,dy\,dz = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \rho\cos\varphi\cdot\rho^2\text{sen}\,\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = 2\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1\cdot 2\pi\cdot\frac{\text{sen}^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\frac{1}{4}2\pi\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

e na tampa,

$$\int\int_T \vec{F}\cdot\vec{n}\,dT = -\int\int_T (xy^2, 0, 1)\cdot\vec{k}\,dT = -\int\int_T dT = -Area(T) = -\pi$$

onde usamos a normal exterior à tampa. Finalmente temos

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int\int_{\overline{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS - \int\int_T \vec{F}\cdot\vec{n}\,dT = \frac{\pi}{2} + \pi = \frac{3}{2}\pi$$

**Questão 3. (Turma A)** Calcule

$$\int_\gamma (2xy + z^2)dx + (x^2 + \ln\sqrt{1+y^2})dy + (z^2 + 1 + x)dz$$

onde $\gamma$ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = 10 + x$, orientada de tal forma que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário.

**Solução:**

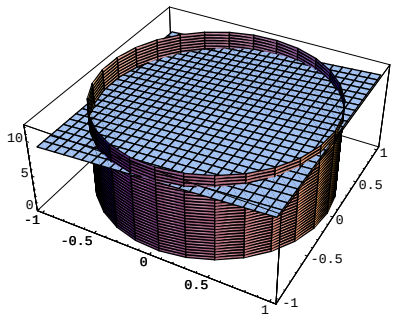


Figura 4: Interseção do cilindro e o plano.

Vamos usar o Teorema de Stokes, para isso

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2ry + z^2 & x^2 + \ln\sqrt{1+y^2} & z^2 + 1 + x \end{vmatrix} = (0, 2z - 1, 0)$$

Precisamos calcular $\vec{n}$, o vetor normal ao plano $z = 10+x$ com a orientação adequada. Obtemos $\vec{n} = (\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (por álgebra linear). Logo por Stokes

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\gamma = \int\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int\int_S (0, 2z - 1, 0) \cdot \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dS = 0$$

**Questão 1. (Turma B)** Calcule

$$\int\int_S x^2 + y^2 \, dS$$

onde $S$ é a parte do parabolóide $z = 9 - x^2 - y^2$ com $5 \leq z \leq 8$.

**Solução:** Parametrizamos a superfície com $\sigma(r, \theta) = (r\cos\theta, r\text{sen}\,\theta, 9 - r^2)$, onde $1 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

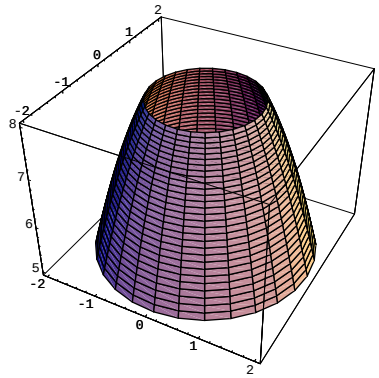

Figura 5: Superfície $S$.

Segue que

$$\sigma_r \wedge \sigma_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\theta & \text{sen}\,\theta & -2r \\ -r\text{sen}\,\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (2r^2\cos\theta, 2r^2\text{sen}\,\theta, r)$$

E então $|\sigma_r \wedge \sigma_\theta| = r\sqrt{4r^2+1}$. Logo

$$\int\int_S x^2 + y^2 \, dS = \int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2 r\sqrt{4r^2+1}\, dr\, d\theta = 2\pi\int_1^2 r^3\sqrt{4r^2+1}\, dr = 2\pi\int_5^9 \frac{u-1}{4}\sqrt{u}\,\frac{1}{8}\, du =$$
$$\tfrac{\pi}{16}\left(\tfrac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} - \tfrac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_5^9 = \tfrac{\pi}{16}\left(\tfrac{2}{5}(9^{\frac{5}{2}} - 5^{\frac{5}{2}}) - \tfrac{2}{3}(9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}})\right) = \tfrac{\pi}{16}\left(\tfrac{2}{5}(243 - 25\sqrt{5}) - \tfrac{2}{3}(27 - 5\sqrt{5})\right)$$

onde usamos a substituição $u = 4r^2 + 1$ para poder integrar.

**Questão 2. (Turma B)** Calcule

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

onde $\vec{F}(x,y,z) = xy^2\,\vec{i} + xyz\,\vec{j} + (z^3 - y^2z - \frac{1}{2}xz^2 + 1)\vec{k}$, e $S$ é a superfície $x^2+y^2+z^2=1$ com $z \geq 0$, orientada pela normal $\vec{n}$ que satisfaz $\vec{n}\cdot\vec{k} \geq 0$.

**Solução:**

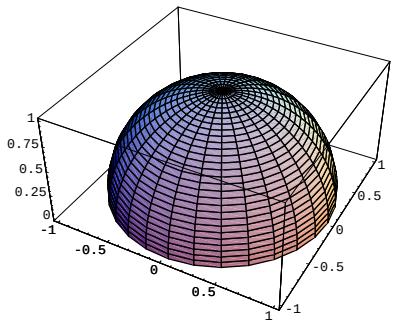


Figura 6: Superfície $S$.

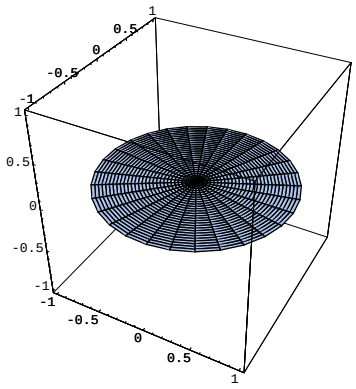


Figura 7: Tampa $T$.

Seja $\overline{S}$ a superfície lisa por partes com traço dado por $S \cup T$, onde $T$ é a tampa que fecha a semiesfera. Assim $R$ é a região limitado por $S$ e $T$. Agora oriente $T$ com a normal $-\vec{k}$, logo pelo Teorema de Gauss aplicado a $\overline{S}$ temos,

$$\int\int_{\overline{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int\int\int_R \text{div}\ \vec{F}\,dx\,dy\,dz = \int\int\int_R y^2 + xz + 3z^2 - y^2 - xz\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 3\rho^2\cos^2\varphi\cdot\rho^2\text{sen}\,\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta = 2\pi.3.\frac{1}{5}\left(\frac{-\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{5}$$

E na tampa

$$\int\int_T \vec{F}\cdot\vec{n}\,dT = -\int\int_T (xy^2, 0, 1)\cdot\vec{k}\,dT = -\int\int_T dT = -Area(T) = -\pi$$

onde usamos a normal exterior à tampa. Finalmente temos

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int\int_{\overline{S}} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS - \int\int_T \vec{F}\cdot\vec{n}\,dT = \frac{2\pi}{5} + \pi = \frac{7}{5}\pi$$

**Questão 3. (Turma B)** Calcule

$$\int_\gamma (y^2 + \ln\sqrt{1+x^2})dx + (2xy + z^2)dy + (z^2 + 1 + y)dz$$

onde $\gamma$ é a intersecção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z = 10 + y$, orientada de tal forma que sua projeção no plano $xy$ seja percorrida no sentido anti-horário.

**Solução:**

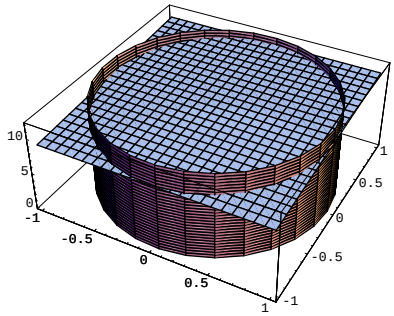


Figura 8: Interseção do cilindro e o plano.

Vamos usar o Teorema de Stokes, para isso

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + \ln\sqrt{1+x^2} & 2xy + z^2 & z^2 + 1 + y \end{vmatrix} = (1 - 2z, 0, 0)$$

Precisamos calcular $\vec{n}$, o vetor normal ao plano $z = 10+x$ com a orientação adequada. Obtemos $\vec{n} = (0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ (por álgebra linear). Logo por Stokes

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\gamma = \int\int_S \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int\int_S (1 - 2z, 0, 0) \cdot \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) dS = 0$$