MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
3ª Prova - 1° semestre de 2002

Questão 1. Seja $\vec{v}(x,y,z) = e^{z^2}\ln(z^2+y^4+1)\,\vec{i} + \operatorname{sen}(x^2+z^2)\vec{j} + z\vec{k}$ e S a semi-esfera $x^2+y^2+z^2 = 2z$, $z \geq 1$, orientada pela normal exterior. Calcule

$$\int\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$$

Solução:

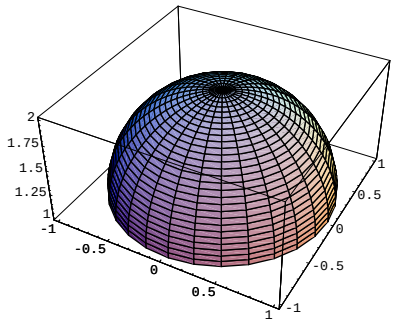

Figura 1: Superfície S.

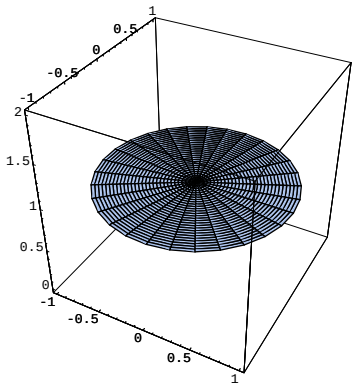

Figura 2: Superfície S_1.

Observemos que $div\,\vec{v} = 1$ e $Dom\,\vec{v} = \mathbb{R}^3$. A semiesfera S não é uma superfície fechada. Consideremos S_1 o disco dado por $S_1 = \{z = 1\,, x^2+y^2 \leq 1\}$. A superfície $S \cup S_1$ é fechada em $\mathbb{R}^3$ e limita a região $R = \{x^2+y^2+z^2 \leq 2z\,, 1 \leq z\}$. Pelo Teorema de Gauss temos

$$\int\int\int_R 1\,dx\,dy\,dz = \int\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS + \int\int_{S_1} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS$$

onde $\vec{n}$ é a normal exterior à R. Agora

$$\int\int\int_R 1\,dx\,dy\,dz = \text{vol}(R) = \frac{2\pi}{3}$$

pois é uma semiesfera de raio 1. Também, como $\vec{n}$ é a normal exterior, e $\vec{v}\cdot(-\vec{k}) = -z = 1$ em S_1 segue que

$$\int\int_{S_1} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \int\int_{S_1} \vec{v}\cdot(-\vec{k})\,dS = \int\int_{S_1} -z\,dS = -\int\int_{S_1} dS = -\text{Area}(S_1) = -\pi$$

Finalmente

$$\int\int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS \int\int\int_R 1\,dx\,dy\,dz - \int\int_{S_1} \vec{v}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{2\pi}{3} - (-\pi) = \frac{5\pi}{3}$$

Questão 2. Calcule

$$\int_\gamma \vec{v}\, d\gamma$$

onde γ é a intersecção das supefícies $z = \operatorname{sen}^6 y + 10$ e $x^2 + y^2 = 1$, orientada de modo que a sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido horário e $\vec{v}(x, y, z) = (x^y, z, y + z^{10})$.

Solução:

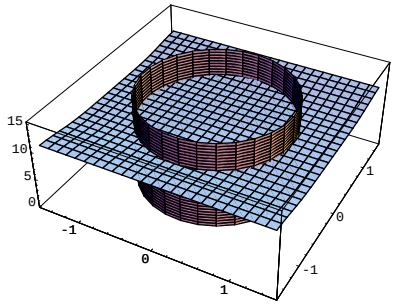

Figura 3: Interseção das superfícies.

Como o cálculo direto com a parametrização natural da curva pode ser complicado, tentamos aplicar o Teorema de Stokes. Observamos que $Dom\, \vec{v} = \mathbb{R}^3$ e que $\nabla \times \vec{v} = (1 - 1, 0 - -x^2) = (0, 0, -x^2)$. Consideramos a superfície $S = \{z = 10 + \operatorname{sen}^6 y\,, x^2 + y^2 \leq 1\}$. Notemos que $\partial S = \gamma$. Parametrizamos $\sigma(u, v) = (u, v, 10 + \operatorname{sen}^6 v)$. O vetor normal é $\sigma_u \wedge \sigma_v = (0, -6\operatorname{sen}^5 v \cos v, 1)$ e o dominio de integração é $D = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$.
Pelo Teorema de Stokes temos $\int\int_S \nabla \vec{v} \cdot \vec{n}\, dS = \int_\gamma \vec{v}\, d\gamma$, com as orientações adequadas. Se $\vec{n}$ apontar para acima, ou seja, $\vec{n} \cdot \vec{v} > 0$, temos que γ está no sentido antihorario. Assim

$$\int\int_D (0, -6\operatorname{sen}^5 v \cos v, 1) \cdot (0, 0, -u^2)\, du\, dv = \int\int_D -\, u^2\, du\, dv$$

Em coordenadas polares

$$\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho(-\rho^2 \cos^2 \theta)\, d\theta\, d\rho = -\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^1 \pi = -\frac{\pi}{4}$$

Portanto

$$\int_\gamma v\, d\gamma = \frac{\pi}{4}$$

Questão 3. Calcule

$$\int\int_S \frac{x^2 z}{\sqrt{1+2z^2}}\, dS$$

onde S é o hiperboloide $x^2+y^2=1+z^2$, $1 \le z \le 2$.

Solução:

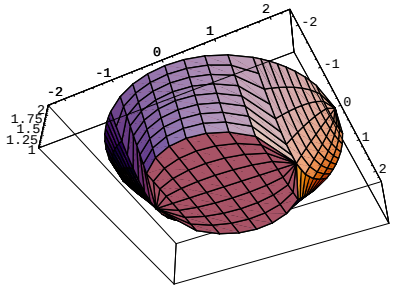

Figura 4: Superfície S.

Parametrizamos o hiperboloide

$$\begin{cases} x = \sqrt{1+z^2}\cos\theta \\ y = \sqrt{1+z^2}\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

Então

$$\sigma_\theta = \sqrt{1+z^2}\ (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta, 0)$$
$$\sigma_z = (\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\cos\theta, \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\operatorname{sen}\theta, 1)$$

Logo

$$\sigma_\theta \wedge \sigma_z = (\sqrt{1+z^2}\cos\theta, \sqrt{1+z^2}\operatorname{sen}\theta, -z)$$

Portanto, como $|\sigma_\theta \wedge \sigma_z| = \sqrt{1+z^2}$, temos que

$$\int\int_S \frac{x^2 z}{\sqrt{1+2z^2}}\, dS = \int_0^{2\pi}\int_1^2 \frac{(1+z^2)\cos^2\theta\ z}{\sqrt{1+2z^2}}\sqrt{1+2z^2}\, dz\, d\theta = \int_0^{2\pi}\int_1^2 (z+z^3)\cos^2\theta\, dz\, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{4}\Big|_1^2 \cos^2\theta\, d\theta = (2+4-\frac{1}{2}-\frac{1}{4})\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = (6-\frac{3}{4})\pi = \frac{21}{4}\pi$$