Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
3ª Prova - 1° semestre de 2000

Turma A

Questão 1. (3,0 pontos) Calcule $\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$ onde $\vec{F}(x,y,z) = (1, \cos y, 3x+2y)$ e S é a parte de $z = x^2$ com $x \geq 0,\ y \geq 0$ e $x + y \leq 2$ orientada com normal unitário $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} > 0$.

Solução:

A região de integração pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$X(u,v) : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u^2; \quad (u,v) \in U, \end{cases}$$

com U sendo parametrizada por:

$$U : \begin{cases} 0 \leq v \leq 2-u \\ 0 \leq u \leq 2. \end{cases}$$

com

$$X_u \wedge X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-2u, 0, 1)$$

Usando Fubini, vamos calcular a integral

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \int_0^2\int_0^{2-u}(-2u+3u+2v)dvdu = \int_0^2 (u(2-u)+(2-u)^2)du = 4$$

Questão 2. (3,5 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ com $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-z}{x^2+z^2} - zy, \frac{y}{1+y^4}, \frac{x}{x^2+z^2} + xy\right)$, onde γ é a interseção do cilindro $x^2+z^2 = 1$ e da superfície $x^2 = 2-y$, orientada de modo que a sua projeção no plano xz seja percorrida no sentido anti-horário.

Solução: Notemos que $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-z}{x^2+z^2}, 0, \frac{x}{x^2+z^2}\right) + \left(-zy, \frac{y}{1+y^4}, xy\right)$.

$$Rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-z}{x^2+z^2} & 0 & \frac{x}{x^2+z^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -zy & \frac{y}{1+y^4} & xy \end{vmatrix}$$

$$Rot(\vec{F}) = \vec{0} + (x, -2y, z).$$

Seja S a parte da superfície cilíndrica $x^2+z^2 = 1$ limitada por $y = 0$ e $x^2 = 2-y$. Se γ_1 é a circunferencia de raio 1 no plano xz orientada no sentido horário, pelo teorema de Stokes

$$\int\int_S Rot(\vec{F})\cdot\vec{n}dS = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

onde $\vec{n}$ é a normal exterior a S,com $\vec{n} = (x, 0, z)$ e então

$$\int\int_S 1dS = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} - 2\pi.$$

Pois

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} (-\sin t, 0, \cos t) \cdot (-\sin t, 0, \cos t) dt = -2\pi.$$

Parametrizando S em coordenadas cilíndricas temos $X(u, v) = (\cos u, v, \sin u)$ logo

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_S 1dS + 2\pi = \int_0^{2\pi} \int_0^{2-\cos^2 u} 1dvdu + 2\pi = \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{1 + \cos 2u}{2}\right) du + 2\pi = 5\pi.$$

Questão 3. (3,5 pontos) Calcule $\int\int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS$ onde $\vec{V}(x, y, z) = (y^2, \sin(2\pi z^{10}), e^{x^2+z^5}, z^2)$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ com $z \leq 1$ orientada pela normal exterior à esfera.

Solução:

A equação da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ou $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$ tem centro $(0, 0, 1)$ e raio 1. A superfície S é a parte inferior desta esfera. Seja T a tampa orientada com a normal $\vec{k}$.

Se $S_1 = S \cup T$, calculando $div(\vec{V}) = 2z$ e pelo teorema de Gauss temos que

$$\int\int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS + \int\int_T \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int\int\int_R div(\vec{V}) dxdydz = \int\int\int_R 2z dxdydz.$$

Parametrizando R em coordenadas esféricas temos $x = r\cos\theta \sin\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = 1 + r\cos\varphi$ com $0 \leq theta \leq 2\pi,\ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 1$ temos que

$$\begin{aligned} \int\int\int_R div(\vec{V}) dxdydz &= \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^1 2(1 + r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi dr d\varphi d\theta \\ &= 4\pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi\right) d\varphi = \frac{5\pi}{6} \end{aligned}$$

e

$$\int\int_T \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int\int_T 1dS = \pi.$$

Portanto

$$\int\int_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \frac{5\pi}{6} - \pi = \frac{-\pi}{6}.$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
3ª Prova - 1° semestre de 2001

Turma B

Questão 1. (3,0 pontos) Calcule $\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS$ onde $\vec{F}(x,y,z) = (\sin y, 1, x+4y)$ e S é a parte de $z = y^2$ com $x \geq 0,\ y \geq 0$ e $x + y \leq 2$ orientada com normal unitário $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} > 0$.

Solução:

A região de integração pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$X(u,v) : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = v^2; \quad (u,v) \in U, \end{cases}$$

com U sendo parametrizada por:

$$U : \begin{cases} 0 \leq v \leq 2-u \\ 0 \leq u \leq 2. \end{cases}$$

com

$$X_u \wedge X_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2v \end{vmatrix} = (0, -2v, 1)$$

Usando Fubini, vamos calcular a integral

$$\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{N}dS = \int_0^2\int_0^{2-u}(-2v+u+4v)dvdu = \int_0^2 (u(2-u)+(2-u)^2)du = 4$$

Questão 2. (3,5 pontos) Calcule $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ com $\vec{F} = \left(\frac{-z}{x^2+z^2} - zy, \frac{y^3}{1+y^6}, \frac{x}{x^2+z^2} + xy\right)$, onde γ é a interseção do cilindro $x^2+z^2 = 1$ e da superfície $x^2 = 3-y$, orientada de modo que a sua projeção no plano xz seja percorrida no sentido anti-horário.

Solução:

Notemos que $\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{-z}{x^2+z^2}, 0, \frac{x}{x^2+z^2}\right) + \left(-zy, \frac{y^3}{1+y^6}, xy\right)$.

$$Rot(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-z}{x^2+z^2} & 0 & \frac{x}{x^2+z^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -zy & \frac{y^3}{1+y^6} & xy \end{vmatrix}$$

$$Rot(\vec{F}) = \vec{0} + (x, -2y, z).$$

Seja S a parte da superfície cilíndrica $x^2+z^2 = 1$ limitada por $y = 0$ e $x^2 = 3-y$. Se γ_1 é a circunferencia de raio 1 no plano xz orientada no sentido horário, pelo teorema de Stokes

$$\int\int_S Rot(\vec{F})\cdot\vec{n}dS = \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

onde $\vec{n}$ é a normal exterior a S,com $\vec{n} = (x, 0, z)$ e então

$$\int\int_S 1dS = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} - 2\pi.$$

Pois

$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{2\pi} (-\sin t, 0, \cos t) \cdot (-\sin t, 0, \cos t)dt = -2\pi.$$

Parametrizando S em coordenadas cilíndricas temos $X(u, v) = (\cos u, v, \sin u)$ logo

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_S 1dS + 2\pi = \int_0^{2\pi}\int_0^{2-\cos^2 u} 1dvdu + 2\pi = \int_0^{2\pi} \left(2 - \frac{1+\cos 2u}{2}\right) du + 2\pi = 5\pi.$$

Questão 3. (3,5 pontos) Calcule $\int\int_S \vec{V} \cdot \vec{n}dS$ onde $\vec{V}(x, y, z) = (y^3 + \cos(2\pi z^{10}), e^{x^5+z^2}, 2z^2)$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ com $z \leq 1$ orientada pela normal exterior à esfera.

Solução:

A equação da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ ou $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ tem centro $(0, 0, 1)$ e raio 1. A superfície S é a parte inferior desta esfera. Seja T a tampa orientada com a normal $\vec{k}$.

Se $S_1 = S \cup T$, calculando $div(\vec{V}) = 4z$ e pelo teorema de Gauss temos que

$$\int\int_S \vec{V} \cdot \vec{n}dS + \int\int_T \vec{V} \cdot \vec{n}dS = \int\int\int_R div(\vec{V})dxdydz = \int\int\int_R 4zdxdydz.$$

Parametrizando R em coordenadas esféricas temos $x = r\cos\theta \sin\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = 1 + r\cos\varphi$ com $0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi,\ 0 \leq r \leq 1$ temos que

$$\begin{aligned}\int\int\int_R div(\vec{V})dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^1 4(1 + r\cos\varphi)r^2 \sin\varphi drd\varphi d\theta \\ &= 8\pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{1}{3}\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin\varphi\cos\varphi\right)d\varphi = \frac{10\pi}{6}\end{aligned}$$

e

$$\int\int_T \vec{V} \cdot \vec{n}dS = \int\int_T 2dS = 2\pi.$$

Portanto

$$\int\int_S \vec{V} \cdot \vec{n}dS = \frac{10\pi}{6} - 2\pi = \frac{-\pi}{3}.$$