Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
3ª Prova - 1° semestre de 2000

Turma A

Questão 1. (3,0 pontos) Calcule $\int\int_S y^2 d\sigma$ onde S é a parte de $y^2 + (z-5)^2 = 9$ com $0 \leq x \leq 2 + z$.

Solução:

A região de integração pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\sigma : \begin{cases} x = v \\ y = 3\cos u \\ z = 5 + 3\text{sen}u; \quad (u,v) \in U, \end{cases}$$

com U sendo parametrizada por:

$$U : \begin{cases} 0 \leq v \leq 7 + 3\sin u \\ 0 \leq u \leq 2\pi. \end{cases}$$

Vamos calcular $||\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v||$, então $\vec{\sigma}_u = (0, -3\sin u, 3\cos u)$ e $\vec{\sigma}_v = (1,0,0)$ logo $\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v = 3\cos u\vec{j} + 3\sin u\vec{k}$ portanto $||\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v|| = 3$.

Usando Fubini, vamos calcular a integral

$$\begin{aligned} \int\int_S y^2 d\sigma &= \int\int_U (9\cos^2 u)3dudv = 27\int_0^{2\pi}\int_0^{7+3\sin u} \cos^2 udvdu \\ &= 27\int_0^{2\pi} \cos^2 u(7 + 3\sin u)du = 27\int_0^{2\pi} 7\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2u}{2}\right)du + 27\int_0^{2\pi} 3\cos^2 u\sin udu \\ &= 189\pi - 27\cos^3 u\,\Big|_0^{2\pi} = 189\pi. \end{aligned}$$

Questão 2. (3,5 pontos) Calcule $\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma$ onde

$$\vec{F}(x,y,z) = y^3\sin z\vec{i} + (\sqrt{e^x + 2 + \sin x} + x^2 y)\vec{j} + \vec{k}$$

e S é a parte de $z = x^2 + y^2$ com $0 \leq z \leq 4$ orientada com normal unitário $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} < 0$.

Solução:

Calculando o divergente de $\vec{F}$, temos que $div(\vec{F}) = x^2$.

Para obter um sólido escolha S_1 como sendo a parte de $z = 4$ limitada por $z = x^2 + y^2$ e com normal unitário $\vec{N}$ tal que $\vec{N} = \vec{k}$. Pelo teorema de Gauus temos:

$$\int\int_{S\cup S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma = \int\int\int_{\text{Sólido}} x^2 dxdydz$$

A região de S_1 pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 4; \quad (u,v) \in U = \{(u,v) : u^2 + v^2 \leq 4\}, \end{cases}$$

calculando $\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v = \vec{k}$ obtemos que S_1 tem a orientação correta.

$$\int\int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \int\int_U dudv = \text{área}(U) = 4\pi$$

A região do sólido pode ser parametrizada em coordenadas cilíndricas da seguinte forma:

$$\sigma : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z; \end{cases}$$

o sólido com $r,\ \theta$ e z entre:

$$\begin{cases} r^2 \leq z \leq 4 \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

calculando a integral no sólido e aplicando Fubini obtemos

$$\begin{aligned} \int\int\int_{\text{sólido}} x^2 dxdydz &= \int\int\int_{\text{sólido}_{(r\ \theta\ z)}} r^3\cos^2\theta drd\theta dz \\ &= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^4 r^3\cos^2\theta dzd\theta dr = \int_0^2\int_0^{2\pi}(4-r^2)r^3\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta dr = \pi\int_0^2\int_0^{2\pi}(4r^3 - \\ &= \pi\left(r^4 - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

Resposta final:

$$\int\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \frac{16}{3}\pi - 4\pi = \frac{4\pi}{3}.$$

Questão 3. (3,5 pontos) Calcule $\int_\gamma \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2} + \left(x + \frac{1}{2+\cos z}\right)dz$ onde γ é a interseção de $z = 4 + y$ e $x^2 + y^2 = 1$ orientada de modo que a sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido horário.

Solução: Calculando $\vec{Rot}(\vec{F}) = -\vec{j}$.

Escolha a superfície S como sendo a parte de $x^2 + y^2 = 1$ com $0 \leq z \leq 4 + y$ e orientada com normal unitátio $\vec{N}$ exterior ao cilindro.

Pelo teorema de Stokes temos:

$$\int_{\partial S = \gamma \cup \tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_S \vec{Rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N} d\sigma$$

onde $\tilde{\gamma}$ é a interseção de $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$ orientada no sentido anti-horário.

Uma parametrização para $\tilde{\gamma}$ é

$$\tilde{\gamma} : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0; \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Vamos calcular a tintegral sobre $\tilde{\gamma}$,

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = 2\pi$$

Uma parametrização para S é

$$\sigma : \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v; \quad (u,v) \in U. \end{cases}$$

com

$$U : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq 4 + \sin u. \end{cases}$$

Calculando $\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v = \cos u \vec{i} + \sin u \vec{j}$ temos a orientação correta.
Usando Fubini calculamos a integral sobre S, obtendo

$$\int\int_S \vec{Rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N} d\sigma \quad = \quad \int\int_U -\sin u du dv = -\int_0^{2\pi} \int_0^{4+\sin u} \sin u dv du = -\int_0^{2\pi} (4\sin u + \sin^2 u) du = -\pi$$

Resposta final:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\pi - 2\pi = -3\pi$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT 2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
3ª Prova - 1° semestre de 2000

Turma B

Questão 1. (3,0 pontos) Calcule $\int\int_S z^2 d\sigma$ onde S é a parte de $(y-2)^2+z^2=9$ com $0 \leq x \leq 2+y$.

Solução:

A região de integração pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\sigma : \begin{cases} x = v \\ y = 2 + 3\cos u \\ z = 3\sin u; \quad (u,v) \in U, \end{cases}$$

com U sendo parametrizada por:

$$U : \begin{cases} 0 \leq v \leq 4 + 3\cos u \\ 0 \leq u \leq 2\pi. \end{cases}$$

Vamos calcular $||\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v||$, então $\vec{\sigma}_u = (0, -3\sin u, 3\cos u)$ e $\vec{\sigma}_v = (1,0,0)$ logo $\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v = 3\cos u\vec{j} + 3\sin u\vec{k}$ portanto $||\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v|| = 3$.

Usando Fubini, vamos calcular a integral

$$\begin{aligned} \int\int_S z^2 d\sigma &= \int\int_U (9\sin^2 u)3dudv = 27\int_0^{2\pi}\int_0^{4+3\cos u} \sin^2 u dvdu \\ &= 27\int_0^{2\pi} \sin^2 u(4+3\cos u)du = 27\int_0^{2\pi} 4\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2u}{2}\right)du + 27\int_0^{2\pi} 3\sin^2 u\cos u du \\ &= 108\pi + 27\sin^3 u\,\Big|_0^{2\pi} = 108\pi. \end{aligned}$$

Questão 2. (3,5 pontos) Calcule $\int\int_S \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma$ onde

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^3\sin z + x^3)\vec{i} + (\sqrt{e^x + 2 + \sin x} + x^2)\vec{j} - \vec{k}$$

e S é a parte de $z = x^2+y^2$ com $0 \leq z \leq 4$ orientada com normal unitário $\vec{N}$ tal que $\vec{N}\cdot\vec{k} < 0$.

Solução:

Calculando o divergente de $\vec{F}$, temos que $div(\vec{F}) = 3x^2$.

Para obter um sólido escolha S_1 como sendo a parte de $z=4$ limitada por $z = x^2+y^2$ e com normal unitário $\vec{N}$ tal que $\vec{N} = \vec{k}$.

Pelo teorema de Gauus temos:

$$\int\int_{S\cup S_1} \vec{F}\cdot\vec{N}d\sigma = \int\int\int_{\text{Sólido}} 3x^2 dxdydz$$

A região de S_1 pode ser parametrizada da seguinte forma:

$$\sigma : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 4; \quad (u,v) \in U = \{(u,v) : u^2+v^2 \leq 4\}, \end{cases}$$

calculando $\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v = \vec{k}$ obtemos que S_1 tem a orientação correta.

$$\int\int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = \int\int_U dudv = \text{área}(U) = 4\pi$$

A região do sólido pode ser parametrizada em coordenadas cilíndricas da seguinte forma:

$$\sigma : \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z; \end{cases}$$

o sólido com $r,\ \theta$ e z entre:

$$\begin{cases} r^2 \leq z \leq 4 \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi. \end{cases}$$

calculando a integral no sólido e aplicando Fubini obtemos

$$\begin{aligned} \int\int\int_{\text{sólido}} 3x^2 dxdydz &= \int\int\int_{\text{sólido}_{(r\ \ \theta\ \ z)}} 3r^3\cos^2\theta drd\theta dz \\ &= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^4 3r^3\cos^2\theta dzd\theta dr = \int_0^2\int_0^{2\pi}(4-r^2)3r^3\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta dr = 3\pi\int_0^2\int_0^{2\pi}(4 \\ &= 3\pi\left(r^4 - \frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^2 = 16\pi \end{aligned}$$

Resposta final:

$$\int\int_S \vec{F} \cdot \vec{N} d\sigma = 16\pi - 4\pi = 12\pi.$$

Questão 3. (3,5 pontos) Calcule $\int_\gamma \frac{-ydx - xdy}{x^2+y^2} + \left(y + \frac{1}{2+\sin z}\right) dz$ onde γ é a interseção de $z = 3 + x$ e $x^2 + y^2 = 1$ orientada de modo que a sua projeção no plano xy seja percorrida no sentido horário.

Solução: Calculando $\vec{Rot}(\vec{F}) = \vec{i}$.

Escolha a superfície S como sendo a parte de $x^2 + y^2 = 1$ com $0 \leq z \leq 3 + x$ e orientada com normal unitátio $\vec{N}$ exterior ao cilindro.

Pelo teorema de Stokes temos:

$$\int_{\partial S = \gamma \cup \tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\int_S \vec{Rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N} d\sigma$$

onde $\tilde{\gamma}$ é a interseção de $x^2 + y^2 = 1$ e $z = 0$ orientada no sentido anti-horário.

Uma parametrização para $\tilde{\gamma}$ é

$$\tilde{\gamma} : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = 0; \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$$

Vamos calcular a tintegral sobre $\tilde{\gamma}$,

$$\int_{\tilde{\gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = 2\pi$$

Uma parametrização para S é

$$\sigma : \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v; \quad (u, v) \in U. \end{cases}$$

com

$$U : \begin{cases} 0 \leq u \leq 2\pi \\ 0 \leq v \leq 3 + \cos u. \end{cases}$$

Calculando $\vec{\sigma}_u \wedge \vec{\sigma}_v = \cos u \vec{i} + \sin u \vec{j}$ temos a orientação correta.
Usando Fubini calculamos a integral sobre S, obtendo

$$\int\int_S \vec{Rot}(\vec{F}) \cdot \vec{N} d\sigma \quad = \quad \int\int_U \cos u du dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{3+\cos u} \cos u dv du = -\int_0^{2\pi} (3\cos u + \cos^2 u) du = \pi$$

Resposta final:

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \pi - 2\pi = -\pi$$