Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
2a. Prova - 1o. Semestre 2016 - 10/05/2016

Turma A

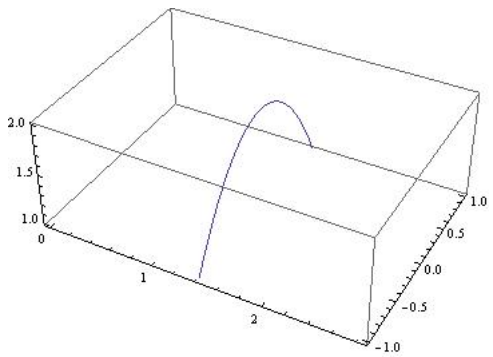
Questão 1:

(a) Calcule a massa do fio cujo formato é o da curva da intersecção das superfícies $z = x^2 - y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$, $x > 0$, $|y| \leq 1$, com densidade $\delta(x, y, z) = |y|$

(b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma ydx + zdy + xdz$ sendo γ a curva de intersecção das superfícies $4y^2 + z^2 = 4$ e $x + y + z = 1$, percorrida de modo que sua projeção no plano yz seja percorrida no sentido anti-horário.

Solução:

(a) Os pontos da curva são dados pelas soluções do sistema: $\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ z = 4 - x^2 - y^2 \to x = \sqrt{2}(x > 0) \end{cases}$



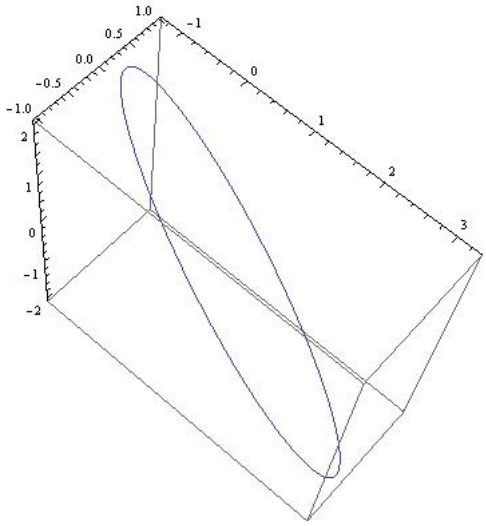
Substituindo na primeira equação, obtém-se $z = 2 - y^2$. Assim, uma parametrização para a curva é dada por $\gamma(t) = (\sqrt{2}, t, 2 - t^2)$, com $-1 \leq t \leq 1$. Assim, $\gamma'(t) = (0, 1, -2t) \Rightarrow |\gamma'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$

A massa do fio é dada por:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{1 + 4t^2}\, dt = 2\int_0^1 t\sqrt{1 + 4t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 8t\sqrt{1 + 4t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{6}\left(1 + 4t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \end{aligned}$$

(b) Os pontos da curva são dados pelas soluções do sistema: $\begin{cases} 4y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow y^2 + (z/2)^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \Rightarrow x + y + z = 1 \end{cases}$

A curva pode ser parametrizada por: $\gamma(t) = (1 - \cos t - 2\ \operatorname{sen} t, \cos t, 2\ \operatorname{sen} t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$



A integral pode ser calculada por:

$$
\begin{aligned}
\int \vec{F}\, d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \cos t(\ \operatorname{sen} t - 2\cos t) + (2\ \operatorname{sen} t)(-\ \operatorname{sen} t) + (1 - \cos t - 2\ \operatorname{sen} t)2\cos t\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -2\cos^2 t - 2\ \operatorname{sen}^2 t - 2\cos^2 t\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} 2 + 2\cos^2 t \\
&= -4\pi - 2\pi = -6\pi
\end{aligned}
$$

Questão 2:

Sejam $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ os campos vetoriais definidos como

$$\vec{F_1}(x,y) = (\ \operatorname{sen} y e^{x\ \operatorname{sen} y}, x\cos y e^{x\ \operatorname{sen} y}),\ \ \vec{F_2}(x,y) = (0,x),\ \ \vec{F_3} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

(a) Decida, justificando, se cada um dos campos $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ é conservativo ou não.

(b) Calcule $\int \vec{F_3}\, d\vec{r}$ sendo γ o arco da circunferência de raio 1, que liga $(0,0)$ a $(0,2)$ com $x \geq 0$

Solução:

(a) Inicialmente calcula-se o rotacional de cada um dos campos.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F_1} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= \left(\cos y e^{x\ \operatorname{sen} y} + x\cos y\ \operatorname{sen} y e^{x\ \operatorname{sen} y} - \cos y e^{x\ \operatorname{sen} y} + x\cos y\ \operatorname{sen} y e^{x\ \operatorname{sen} y}\right)\vec{k} \\
&= 0\vec{k}
\end{aligned}$$

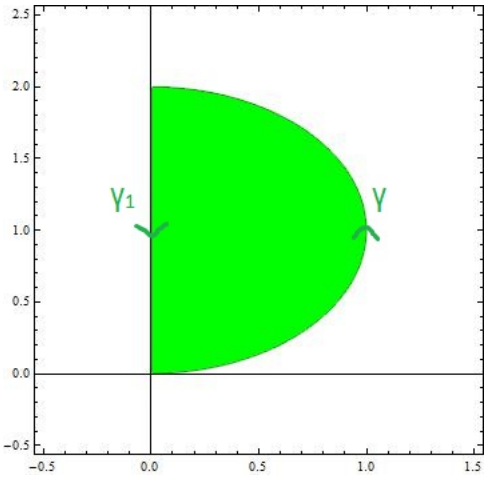
$$\operatorname{rot}\vec{F_2} = (1-0)\vec{k} = \vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\vec{F_3} = \operatorname{rot}\vec{F_1} + \operatorname{rot}\vec{F_2} = \vec{k}$$

Nota-se que o o campo $\vec{F_1}$ é de classe C^1 e seu domínio é $\mathbb{R}^2$, que é simplesmente conexo. Como $\operatorname{rot}\vec{F_1} = \vec{0}$, conclui-se que $\vec{F_1}$ é conservativo.

Como $\operatorname{rot}\vec{F_2} \neq 0$ e $\operatorname{rot}\vec{F_3} \neq 0$, conclui-se que $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$ não são conservativos.

(b) Seja γ_1 o segmento que une $(0,2)$ e $(0,0)$ e D a região tal que $\partial D = \gamma \cup \gamma_1$



Como D, seu bordo e $\vec{F_3}$ satisfazem as condições do Teorema de Green:

$$\int_{\gamma} \vec{F_3}\, d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F_3}\, d\vec{r} = \iint_D \mathrm{rot}\vec{F_3} \cdot \vec{k}\, dx\, dy$$

Como $\mathrm{rot}\vec{F_3} \cdot \vec{k} = 1$, a integral sobre o domínio é igual à área da região D, que, por sua vez, é igual à metade da área da circunferência de raio 1. Portanto:

$$\iint \mathrm{rot}\vec{F_3} \cdot \vec{k}\, dx\, dy = \frac{\pi}{2}$$

Nota-se que $\gamma_1(t) = (0, -t)$ com $-2 \leq t \leq 0$ e $\gamma_1'(t) = (0, -1)$.

Calculando a integral de linha sobre γ_1:

$$\int_{\gamma_1} \vec{F_3}\, d\vec{r} \quad = \quad \int_{-2}^{0} (-\ \mathrm{sen}\, t, 0).(0, -1)\, dt = 0.$$

Assim

$$\int_{\gamma} \vec{F_3}\, d\vec{r} = \frac{\pi}{2}$$

Questão 3:

Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{-(y-2)dx+(x+3)dy}{(x+3)^2+(y-2)^2}$ sendo γ o arco da curva $y=-x^2-6x-5$ que liga $(-1,0)$ a $(-5,0)$

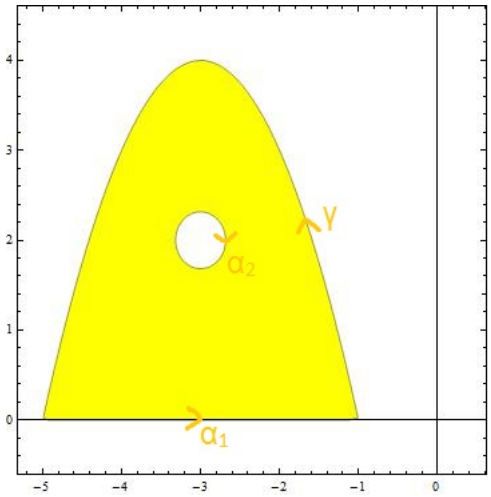
Solução:

Sendo $\vec{F}(x,y)=\frac{-(y-2)dx+(x+3)dy}{(x+3)^2+(y-2)^2}$, calcula-se o rotacional:

$$\begin{aligned}
\text{rot}\vec{F} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\\
&= \left(\frac{1.((x+3)^2+(y-2)^2)-(x+3).2.(y-2)}{((x+3)^2+(y-2)^2)^2}-\frac{1.((x+3)^2+(y-2)^2)-(y-2).2(x+3)}{((x+3)^2+(y-2)^2)^2}\right)\vec{k}\\
&= 0\vec{k}
\end{aligned}$$

O domínio de $\vec{F}$ é $\mathbb{R}^2-(-3,2)$.

Sejam as curvas $\alpha_1(t)=(t,0)$ com $-5\leq t\leq -1$ e $\alpha_2(t)=(-3+r\ \text{sen}\,t, 2+r\cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$, com r suficientemente pequeno para que α_2 esteja no interior de $\gamma\cup\alpha_1$. Seja R a região fechada cujo bordo é composto das curvas γ, α_1 e α_2, orientadas deixando R à esquerda, conforme a figura:



O Teorema de Green Fornece:

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}+\int_{\alpha_1}\vec{F}\,d\vec{r}+\int_{\alpha_2}\vec{F}\,d\vec{r}=\iint_R \text{rot}\vec{F}\cdot\vec{k}\,dA$$

Como $\text{rot}\vec{F}=\vec{0}$, vem que:

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}=-\int_{\alpha_1}\vec{F}\,d\vec{r}-\int_{\alpha_2}\vec{F}\,d\vec{r}$$

Calculando cada integral separadamente:

$$\int_{\alpha_1}\vec{F}\,d\vec{r}=\int_{-5}^{-1}\frac{2+(3+t).0}{(t+3)^2+4}\,dt=2\int_{-5}^{-1}\frac{1}{(t+3)^2+4}\,dt$$

Chamando $u=t+3\Rightarrow du=dt$ com $-2\leq u\leq 2$. A integral passa a ser:

$$
\begin{aligned}
\int_{\alpha_1} \vec{F}\, d\vec{r} &= 2\int_{-2}^{2} \frac{1}{u^2+4}\, dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} \frac{1}{\left(\frac{u}{2}\right)^2+1}\, dt \\
&= \arctan\left(\frac{u}{2}\right)\Big|_{-2}^{2} \\
&= \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{\alpha_2} \vec{F}\, d\vec{r} &= \int_{0}^{2\pi} \frac{-r\cos t.r\cos t + r\ \operatorname{sen} t.(-r\ \operatorname{sen} t)}{r^2}\, dt \\
&= 2\int_{0}^{2\pi} -1\, dt \\
&= -2\pi
\end{aligned}
$$

Assim:

$$
\int_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = -(-2\pi) - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}
$$

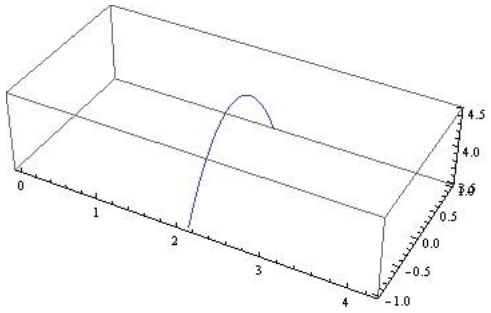
Turma B
Questão 1:

(a) Calcule a massa do fio cujo formato é o da curva da intersecção das superfícies $z = x^2 - y_2$ e $z = 9 - x^2 - y^2$, $x > 0$, $|y| \leq 1$, com densidade $\delta(x, y, z) = |y|$

(b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma ydx + zdy + xdz$ sendo γ a curva de intersecção das superfícies $y^2 + 9z^2 = 9$ e $x + y + z = 1$, percorrida de modo que sua projeção no plano yz seja percorrida no sentido anti-horário.

Solução:

(a) Os pontos da curva são dados pelas soluções do sistema: $\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ z = 9 - x^2 - y^2 \Rightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{2} (x > 0) \end{cases}$



Substituindo na primeira equação, obtém-se $z = 9/2 - y^2$. Assim, uma parametrização para a curva é dada por $\gamma(t) = (\frac{3\sqrt{2}}{2}, t, \frac{9}{2} - t^2)$, com $-1 \leq t \leq 1$

Assim, $\gamma'(t) = (0, 1, -2t) \Rightarrow |\gamma'(t) = \sqrt{1 + 4t^2}|$

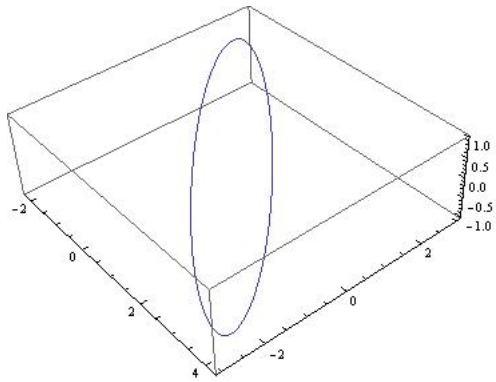
A massa do fio é dada por:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-1}^{1} |t|\sqrt{1+4t^2}\, dt = 2\int_0^2 t\sqrt{1+4t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 8t\sqrt{1+4t^2}\, dt \\ &= \frac{1}{6}\left(1+4t^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{6}\left(5\sqrt{5} - 1\right) \end{aligned}$$

(b) Os pontos da curva são dados pelas soluções do sistema: $\begin{cases} y^2 + 9z^2 = 9 \Rightarrow (y/3)^2 + z^2 = 1 \\ x + y + z = 1 \Rightarrow x + y + z = 1 \end{cases}$

A curva pode ser parametrizada por: $\gamma(t) = (1 - 3\cos t - \operatorname{sen} t, 3\cos t, \operatorname{sen} t)$, com $0 \leq t \leq 2\pi$

A integral pode ser calculada por:



$$
\begin{aligned}
\int \vec{F}\, d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} 3\cos t(3\ \operatorname{sen} t - \cos t) + \ \operatorname{sen} t(-3\ \operatorname{sen} t) + (1 - 3\cos t - \ \operatorname{sen} t)\cos t\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} -3\cos^2 t - 3\ \operatorname{sen}^2 t - 3\cos^2 t\, dt \\
&= -\int_0^{2\pi} 3 + 3\cos^2 t \\
&= -6\pi - 3\pi = -9\pi
\end{aligned}
$$

Questão 2:

Sejam $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ os campos vetoriais definidos como
$\vec{F_1} = (\cos y e^{x \cos y}, -x \ \operatorname{sen} y e^{x \cos y}) \ \Big| \ \vec{F_2} = (y, 0) \ \Big| \ \vec{F_3} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$

(a) Decida, justificando, se cada um dos campos $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$ é conservativo ou não.

(b) Calcule $\int \vec{F_3}\, d\vec{r}$ sendo γ o arco da circunferência de raio 1, que liga $(2,0)$ a $(0,0)$ com $y \geq 0$

(a) Inicialmente calcula-se o rotacional de cada um dos campos.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F_1} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \\
&= (- \ \operatorname{sen} y e^{x \cos y} - x \ \operatorname{sen} y \cos y e^{x \cos y} + \ \operatorname{sen} y e^{x \cos y} + x \ \operatorname{sen} y \cos y e^{x \cos y})\,\vec{k} \\
&= 0\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F_2} &= (0-1)\vec{k} \\
&= -\vec{k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{F_3} &= \operatorname{rot}\vec{F_1} + \operatorname{rot}\vec{F_2} \\
&= -\vec{k}
\end{aligned}$$

Nota-se que o o campo $\vec{F_1}$ é de classe C^1 e seu domínio é $\mathbb{R}^2$, que é simplesmente conexo. Como $\operatorname{rot}\vec{F_1} = \vec{0}$, conclui-se que $\vec{F_1}$ é conservativo.

Como $\operatorname{rot}\vec{F_2} \neq 0$ e $\operatorname{rot}\vec{F_3} \neq 0$, conclui-se que $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$ não são conservativos.

(b) Seja γ_1 o segmento que une $(2,0)$ e $(0,0)$ e D a região tal que $\partial D = \gamma \cup \gamma_1$

Como D e $\vec{F_3}$ satisfazem as condições do Teorema de Green:

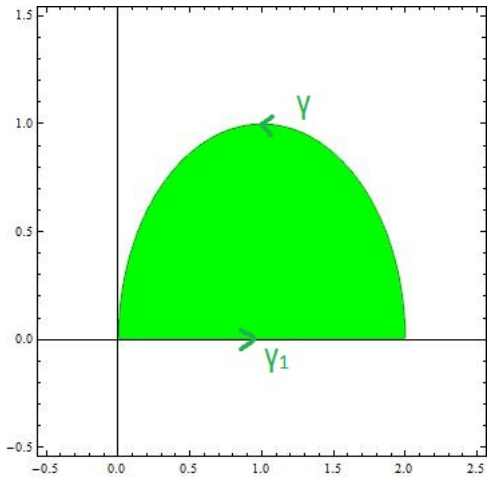
$$\int_{\gamma} \vec{F_3}\, d\vec{r} + \int_{\gamma_1} \vec{F_3}\, d\vec{r} = \iint \operatorname{rot}\vec{F_3}\vec{k}\, dx\, dy$$

Como $\operatorname{rot}\vec{F_3} = -1$, a integral sobre o domínio é igual à área da região D, que, por sua vez, é igual à metade da área da circunferência de raio 1. Portanto:

$$\iint \operatorname{rot}\vec{F_3}\vec{k}\, dx\, dy = -\frac{\pi}{2}$$

Nota-se que $\gamma_1(t) = (t, 0)$ com $0 \leq t \leq 2$ e $\gamma_1'(t) = (1, 0)$.

Calculando a integral: sobre γ_1:



$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} \vec{F_3}\, d\vec{r} &= \int_{-2}^{0} (e^t, 0).(1,0)\, dt \\ &= e^2 - 1\end{aligned}$$

Assim:

$$\int_{\gamma} \vec{F_3}\, d\vec{r} = -\frac{\pi}{2} - e^2 + 1$$

Questão 3:

Calcule $\displaystyle\int_\gamma \frac{-(y-3)dx+(x+4)dy}{(x+4)^2+(y-3)^2}$ sendo γ o arco da curva $y=-x^2-8x-7$ que liga $(-1,0)$ a $(-7,0)$

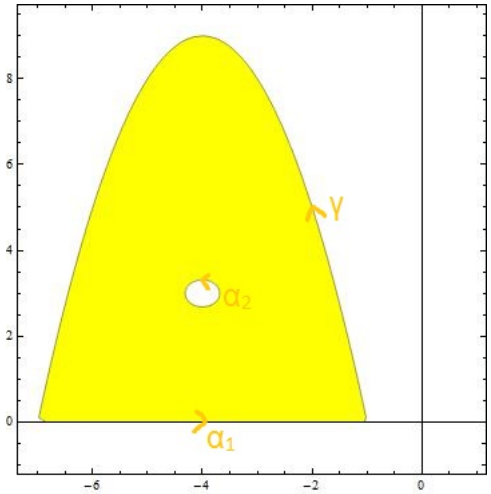
Solução:

Sendo $\vec{F}=\frac{-(y-3)dx+(x+4)dy}{(x+4)^2+(y-3)^2}$,calcula-se o rotacional:

$$\begin{aligned}
\text{rot}\vec{F} &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}\\
&= \left(\frac{1.((x+4)^2+(y-3)^2)-(x+4).2.(y-3)}{((x+4)^2+(y-3)^2)^2}-\frac{1.((x+4)^2+(y-3)^2)-(y-3).2(x+4)}{((x+4)^2+(y-3)^2)^2}\right)\vec{k}\\
&= 0\vec{k}
\end{aligned}$$

O domínio de $\vec{F}$ é $\mathbb{R}^2-(-4,3)$.

Sejam as curvas $\alpha_1(t)=(t,0)$ com $-7\leq t\leq -1$ e $\alpha_2(t)=(-4+r\ \text{sen}\,t, 3+r\cos t)$, $0\leq t\leq 2\pi$, com r suficientemente pequeno para que α_2 esteja no interior de $\gamma\cup\alpha_1$. Seja R a região fechada cujo bordo é composto das curvas γ, α_1 e α_2, orientadas deixando R à esquerda, conforme a figura:



O Teorema de Green Fornece:

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}+\int_{\alpha_1}\vec{F}\,d\vec{r}+\int_{\alpha_2}\vec{F}\,d\vec{r}=\iint_R \text{rot}\vec{F}\vec{k}\,dA$$

Como $\text{rot}\vec{F}=\vec{0}$, vem que:

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\vec{r}=-\int_{\alpha_1}\vec{F}\,d\vec{r}-\int_{\alpha_2}\vec{F}\,d\vec{r}$$

Calculando cada integral separadamente:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_1}\vec{F}\,d\vec{r} &= \int_{-7}^{-1}\frac{3+(3+t).0}{(t+4)^2+9}\,dt\\
&= 3\int_{-7}^{-1}\frac{1}{(t+4)^2+9}\,dt
\end{aligned}$$

Chamando $u = t + 4 \Rightarrow du = dt$ com $-3 \leq u \leq 3$. A integral passa a ser:

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_1} \vec{F}\, d\vec{r} &= 3\int_{-3}^{3} \frac{1}{u^2+9}\, dt \\
&= \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} \frac{1}{\left(\frac{u}{3}\right)^2+1}\, dt \\
&= \arctan\left(\frac{u}{3}\right)\Big|_{-3}^{3} \\
&= (\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right)) = \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha_2} \vec{F}\, d\vec{r} &= \int_{0}^{2\pi} \frac{-r\cos t.r\cos t + r\ \operatorname{sen} t.(-r\ \operatorname{sen} t)}{r^2}\, dt \\
&= 2\int_{0}^{2\pi} -1\, dt \\
&= -2\pi
\end{aligned}$$

Assim:

$$\int_{\gamma} \vec{F}\, d\vec{r} = -(-2\pi) - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$