Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1ª Prova - 1º Semestre 2014 - 13/5/2014

Turma A
1ª **Questão:** (4,0 pontos)

a) Calcule a massa da superfície S onde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 1 \leq z \leq 4\}$, com densidade pontual de massa $\delta(x, y, z) = z\left(1 + 5z^2\right)^{-3/2}$.

b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{xy}\, ds$, onde γ é a parte da interseção do plano $y = x$ com a superfíie $z = x^2 + y^2$, $z \leq 8$, de ponto inicial (0,0,0) e final (2,2,8).

Solução:

a) Primeiramente encontremos uma parametrização para a superfície S. Notemos que S é parte de um cilindro com eixo em z entre os planos $z = 1$ e $z = 4$. Tomando como coordenadas de parametrização u e v, temos que uma possivel parametrização para essa superficie é

$$\sigma(u, v) = (\operatorname{sen} u, \cos u, v)$$
$$0 \leq u \leq 2\pi$$
$$1 \leq v \leq 4$$

A massa da superficie é dada por

$$M = \int_0^{2\pi} \int_1^4 \delta(u, v) \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| dv du$$

onde σ_u e $\sigma_v$são os vetores das derivadas parciais de σ em relação a u e v, respectivamente. Logo

$$\sigma_u = (\cos u, -\operatorname{sen} u, 0)$$
$$\sigma_v = (0, 0, 1)$$
$$\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = \|(-\operatorname{sen} u, -\cos u, 0)\| = 1$$

$$M = \int_0^{2\pi} \int_1^4 v\left(1 + 5v^2\right)^{-3/2} dv du = 2\pi \int_1^4 v\left(1 + 5v^2\right)^{-3/2} dv$$

Fazemos a mudança de váriavel $\alpha = 1 + 5v^2$

$$M = \frac{2\pi}{10} \int_6^{81} \alpha^{-3/2} dv = \frac{-4\pi}{10} \alpha^{-1/2}\Big|_6^{81} = \frac{4\pi}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{9}\right) = \frac{\pi}{45}\left(3\sqrt{6} - 2\right)$$

b) Primeiramente encontremos uma parametrização para a curva

$$\gamma : \begin{cases} z = x^2 + y^2 & (1) \\ y = x & (2) \\ z \leq 8 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), temos $z = 2x^2$ e tomando t como coordenada de parametrização

$$\gamma(t) = \left(t, t, 2t^2\right) \ , \ 0 \leq t \leq 2$$

Logo, a integral fica

$$\int_0^2 \sqrt{t^2} \left\|\gamma'(t)\right\| dt$$

$$\left\|\gamma'(t)\right\| = \left\|(1, 1, 4t)\right\| = \sqrt{2 + 16t^2}$$

Como t é sempre positivo neste caso, a integral fica

$$\int_0^2 t\sqrt{2 + 16t^2} dt$$

Fazemos a mudanÃ§a de variável $u = 2 + 16t^2$

$$\frac{1}{32} \int_2^{66} u^{1/2} dt = \frac{1}{48} \left(66\sqrt{66} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{24} \left(33\sqrt{33} - 1\right)$$

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** (3,0 pontos) Calcule $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, onde

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} + x^2y + \operatorname{sen}(x^3); \frac{x}{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} + x^3 + y^5\ln(y^2+4) \right)$$

e γ é a circunferência unitária $x^2+y^2=1$ orientada no sentido anti-horário.

Solução:

Separemos o campo vetorial proposto em

$$\overrightarrow{F_1}(x,y) = \left(\frac{-y}{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}; \frac{x}{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}} \right)$$

$$\overrightarrow{F_2}(x,y) = \left(x^2y + sen(x^3); x^3 + y^5\ln(y^2+4) \right)$$

Uma vez que $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_\gamma \left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}\right) \cdot d\overrightarrow{r} = \int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot d\overrightarrow{r}$, calculemos cada integral separadamente. Para o cálculo das integrais, utilizemos o Teorema de Green.

Nota-se que $\overrightarrow{F_1}$ está definido em todo $\mathbb{R}^2$ com exceção do ponto $(0,0)$. Nota-se também que a região $R \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira é a curva γ contém o ponto $(0,0)$,impossibilitando a aplicação do Teorema de Green diretamente. Entretanto se criarmos uma curva auxiliar $\alpha(u)$ que contenha em seu interior o ponto $(0,0)$ e que obedeÃ§a as condições do Teorema de Green, então $\gamma \cup \alpha$ nos fornece uma região K em que o teorema é válido. Seja

$$\alpha(u) = a(2\operatorname{sen} u, 3\cos u) \;\; 0 \leq u \leq 2\pi$$

com a suficiente pequeno para que α não intercepte γ. Logo

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_\alpha \overrightarrow{F_1} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy$$

onde P e Q representam o primeiro e segundo compontente de $\overrightarrow{F_1}$, respectivamente. Calculando o integrando do membro à direita da equação, chegamos em

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1.(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}) - \frac{x^2}{2}}{(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9})^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1.(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}) + \frac{2y^2}{9}}{(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9})^2}$$

Portanto, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$

$$\int_\alpha \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_0^{2\pi} (-3\cos u, 2\operatorname{sen} u) \cdot (2\cos u, -3\operatorname{sen} u)\, du = -12\pi$$

Logo

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_\alpha \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = 12\pi$$

Como o domínio de $\overrightarrow{F_2}$ é todo o $\mathbb{R}^2$ e a região $R \subset \mathbb{R}^2$, podemos aplicar o Teorema de Green diretamente.

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$$

onde P e Q representam o primeiro e segundo compontente de $\overrightarrow{F_2}$, respectivamente. Calculando o integrando do membro Ã direita da equação, chegamos em

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - x^2 = 2x^2$$

A região R é a circunferência de raio 1 centrada na origem. Descrevendo-a em coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta & 0 \leq \rho \leq 1 \\ y = \rho \text{sen}\, \theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\rho^3 \cos^2\theta \, d\rho d\theta = 2\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \, d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3 \, d\rho\right) = 2\pi \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = 12\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{25\pi}{2}$$

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** (3,0 pontos) Seja o campo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (ayz\text{sen }(xy) + \text{sen }(yz)\,;\, bxz\text{sen }(xy) + xz\cos(yz)\,;\, cxy\cos(yz) + \cos(xy))$$

a) Determine as constantes reais a, b e c de modo que $rot\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

b) Para as constantes determinadas no item (a), calcule $\int_\gamma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}$ onde

$$\gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ y = x,\ x \geq 0,\ z \geq 0\right\}$$

orientada de modo que o ponto inicial seja (0,0,1).

Solução:

a) Sendo $\overrightarrow{F}$ um campo vetorial cujo domínio é $\mathbb{R}^3$, que é um conjunto simplesmente conexo, temos que ao impor $rot\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{F}$ será conservativo e portanto terá uma função potencial $\phi(x,y,z)$definida por

$$\nabla\phi = \overrightarrow{F} = (P,Q,R)$$

Portanto

$$\phi = \int Pdx = -az\cos(xy) + x\text{sen }(yz) + f(y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = axz\text{sen }(xy) + xz\cos(yz) + \frac{\partial f}{\partial y} = Q = bxz\text{sen }(xy) + xz\cos(yz) + \frac{\partial f}{\partial y}$$

Logo, $a = b$ e $f(y,z) = f(z)$. Prosseguindo

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -a\cos(xy) + xy\cos(yz) + \frac{\partial f}{\partial z} = R = \cos(xy) + cxy\cos(yz)$$

Logo, $c = 1$, $a = b = -1$ e $f = cte$.

$$\phi(x,y,z) = z\cos(xy) + x\text{sen }(yz) + cte$$

OBS: Os valores de a, b e c podem também ser obtidos diretamente do calculo do rotacional do campo.

b) Como $\overrightarrow{F}$ é um campo conservativo, a integral de linha é independente do caminho e depende somente do ponto inicial e final.

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_\gamma \nabla\phi\cdot\overrightarrow{dr} = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} d\phi = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$$

A curva γ é dada por

$$\gamma : \begin{cases} z = x^2+y^2+z^2 & (1) \\ y = x & (2) \\ x \geq 0 & (3) \\ z \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), temos $2x^2 + z^2 = 1$, que podemos parametrizar de acordo com a orientação de que o ponto inicial é (0,0,1) por

$$x = y = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}} \quad z = \cos t$$

Aplicando as condições (3) e (4), temos que

$$\operatorname{sen} t \geq 0 \quad \cos t \geq 0$$

Logo $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Portanto γ é definida como

$$\gamma(t) = \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}, \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}, \cos t \right), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

e o ponto final é $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right)$. Logo

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) - \phi(0,0,1) = 0 - 1 = -1$$

Instituto de Matemática e Estatística da USP
MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III para Engenharia
1ª Prova - 1º Semestre 2014 - 13/5/2014

Turma B
1ª **Questão:** (4,0 pontos)

a) Calcule a massa da superfície S onde $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1,\ 1 \leq z \leq 9\}$, com densidade pontual de massa $\delta(x, y, z) = z\left(1 + 5z^2\right)^{-3/2}$.

b) Calcule $\displaystyle\int_\gamma \sqrt{xy}\, ds$, onde γ é a parte da interseção do plano $y = x$ com a superfície $z = x^2 + y^2$, $z \leq 2$, de ponto inicial (0,0,0) e final (1,1,2).

Solução:

a) Primeiramente encontremos uma parametrização para a superfície$S$. Notemos que S é parte de um cilindro com eixo em z entre os planos $z = 1$ e $z = 9$. Tomando como coordenadas de parametrização u e v, temos que uma possivel parametrização para essa superficie é

$$\sigma(u, v) = (\operatorname{sen} u, \cos u, v)$$
$$0 \leq u \leq 2\pi$$
$$1 \leq v \leq 9$$

A massa da superficie é dada por

$$M = \int_0^{2\pi} \int_1^9 \delta(u, v) \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| dv du$$

onde σ_u e $\sigma_v$são os vetores das derivadas parciais de σ em relação a u e v, respectivamente. Logo

$$\sigma_u = (\cos u, -\operatorname{sen} u, 0)$$
$$\sigma_v = (0, 0, 1)$$
$$\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = \|(-\operatorname{sen} u, -\cos u, 0)\| = 1$$
$$M = \int_0^{2\pi} \int_1^9 v\left(1 + 5v^2\right)^{-3/2} dv du = 2\pi \int_1^9 v\left(1 + 5v^2\right)^{-3/2} dv$$

Fazemos a mudança de váriavel $\alpha = 1 + 5v^2$

$$M = \frac{2\pi}{10} \int_6^{406} \alpha^{-3/2} dv = \frac{-4\pi}{10} \alpha^{-1/2}\Big|_6^{406} = \frac{4\pi}{10}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{406}}\right) = \frac{2\pi}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{406}}\right)$$

b) Primeiramente encontremos uma parametrização para a curva

$$\gamma : \begin{cases} z = x^2 + y^2 & (1) \\ y = x & (2) \\ z \leq 2 & (3) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), temos $z = 2x^2$ e tomando t como coordenada de parametrização

$$\gamma(t) = \left(t, t, 2t^2\right) \;\; 0 \leq t \leq 1$$

Logo, a integral fica

$$\int_0^1 \sqrt{t^2} \|\gamma'(t)\| \, dt$$

$$\|\gamma'(t)\| = \|(1, 1, 4t)\| = \sqrt{2 + 16t^2}$$

Como t é sempre positivo neste caso, a integral fica

$$\int_0^1 t\sqrt{2 + 16t^2} dt$$

Fazemos a mudança de variável $u = 2 + 16t^2$

$$\frac{1}{32} \int_2^{18} u^{1/2} \, dt = \frac{1}{48} \left(54\sqrt{2} - 2\sqrt{2}\right) = \frac{13\sqrt{2}}{12}$$

$2^{\underline{a}}$ **Questão:** (3,0 pontos) Calcule $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr}$, onde

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}} + x^2 y + sen(x^3); \frac{x}{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}} + x^3 + y^5 \ln(y^2+4) \right)$$

e γ é a circunferÃªncia unitária $x^2 + y^2 = 1$ orientada no sentido anti-horário.

Solução:

Separemos o campo vetorial proposto em

$$\overrightarrow{F_1}(x,y) = \left(\frac{-y}{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}}; \frac{x}{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}} \right)$$

$$\overrightarrow{F_2}(x,y) = \left(x^2 y + sen(x^3); x^3 + y^5 \ln(y^2+4) \right)$$

Uma vez que $\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_\gamma \left(\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \right) \cdot d\overrightarrow{r} = \int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot d\overrightarrow{r}$, calculemos cada integral separadamente. Para o cálculo das integrais, utilizemos o Teorema de Green.

Nota-se que $\overrightarrow{F_1}$ está definido em todo $\mathbb{R}^2$ com exceção do ponto $(0,0)$. Nota-se também que a região $R \subset \mathbb{R}^2$ cuja fronteira é a curva γ contém o ponto $(0,0)$, impossibilitando a aplicação do Teorema de Green diretamente. Entretanto se criarmos uma curva auxiliar $\alpha(u)$ que contenha em seu interior o ponto $(0,0)$ e que obedeça as condições do Teorema de Green, então $\gamma \cup \alpha$ nos fornece uma região K em que o teorema é válido. Seja

$$\alpha(u) = a(3\text{sen}\, u, 4\cos u) \;\; 0 \leq u \leq 2\pi$$

com a suficiente pequeno para que α não intercepte γ. Logo

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot d\overrightarrow{r} + \int_\alpha \overrightarrow{F_1} \cdot d\overrightarrow{r} = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy$$

onde P e Q representam o primeiro e segundo componente de $\overrightarrow{F_1}$, respectivamente. Calculando o integrando do membro à direita da equação, chegamos em

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1.(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}) - \frac{2x^2}{9}}{(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16})^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1.(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16}) + \frac{y^2}{8}}{(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16})^2}$$

Portanto, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$

$$\int_\alpha \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_0^{2\pi} (-4\cos u, 3\text{sen}\, u) \cdot (3\cos u, -4\text{sen}\, u)\, du = -24\pi$$

Logo

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = -\int_\alpha \overrightarrow{F_1} \cdot \overrightarrow{dr} = 24\pi$$

Como o domínio de $\overrightarrow{F_2}$ é todo o $\mathbb{R}^2$ e a região $R \subset \mathbb{R}^2$, podemos aplicar o Teorema de Green diretamente.

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{dr} = \iint_R \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy$$

onde P e Q representam o primeiro e segundo compontente de $\overrightarrow{F_2}$, respectivamente. Calculando o integrando do membro Ã direita da equação, chegamos em

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2 - x^2 = 2x^2$$

A região R é a circunferência de raio 1 centrada na origem. Descrevendo-a em coordenadas polares

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta & 0 \leq \rho \leq 1 \\ y = \rho\text{sen}\,\theta & 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\int_\gamma \overrightarrow{F_2} \cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^{2\pi}\int_0^1 2\rho^3\cos^2\theta\, d\rho d\theta = 2\left(\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^3\, d\rho\right) = 2\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot d\overrightarrow{r} = 24\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{49\pi}{2}$$

$3^{\underline{a}}$ **Questão:** (3,0 pontos) Seja o campo

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (cyz\text{sen }(xy) + \text{sen }(yz)\,;\, bxz\text{sen }(xy) + xz\cos(yz)\,;\, axy\cos(yz) + \cos(xy))$$

a) Determine as constantes reais a, b e c de modo que $rot\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$.

b) Para as constantes determinadas no item (a), calcule $\int_\gamma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr}$ onde

$$\gamma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ y = x,\ x \geq 0,\ z \geq 0\right\}$$

orientada de modo que o ponto inicial seja (0,0,1).

Solução:

a) Sendo $\overrightarrow{F}$ um campo vetorial cujo domínio é um conjunto simplesmente conexo, temos que ao impor $rot\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{F}$ será conservativo e portanto terá uma função potencial $\phi(x,y,z)$ definida por

$$\nabla\phi = \overrightarrow{F} = (P,Q,R)$$

Portanto

$$\phi = \int Pdx = -cz\cos(xy) + x\text{sen }(yz) + f(y,z)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = axz\text{sen }(xy) + xz\cos(yz) + \frac{\partial f}{\partial y} = Q = bxz\text{sen }(xy) + xz\cos(yz) + \frac{\partial f}{\partial y}$$

Logo, $c = b$ e $f(y,z) = f(z)$. Prosseguindo

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = -c\cos(xy) + xy\cos(yz) + \frac{\partial f}{\partial z} = R = \cos(xy) + axy\cos(yz)$$

Logo, $a = 1$, $c = b = -1$ e $f = cte$.

$$\phi(x,y,z) = z\cos(xy) + x\text{sen }(yz) + cte$$

OBS: Os valores de a, b e c podem também ser obtidos diretamente do calculo do rotacional do campo.

b) Como $\overrightarrow{F}$ é um campo conservativo, a integral de linha é independente do caminho e depende somente do ponto inicial e final.

$$\int_\gamma \overrightarrow{F}\cdot\overrightarrow{dr} = \int_\gamma \nabla\phi\cdot\overrightarrow{dr} = \int_{\gamma(a)}^{\gamma(b)} d\phi = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$$

A curva γ é dada por

$$\gamma : \begin{cases} z = x^2+y^2+z^2 & (1) \\ y = x & (2) \\ x \geq 0 & (3) \\ z \geq 0 & (4) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), temos $2x^2 + z^2 = 1$, que podemos parametrizar de acordo com a orientação de que o ponto inicial é (0,0,1) por

$$x = y = \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}$$

$$z = \cos t$$

Aplicando as condições (3) e (4), temos que

$$\operatorname{sen} t \geq 0$$

$$\cos t \geq 0$$

Logo $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Portanto γ é definida como

$$\gamma(t) = \left(\frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}, \frac{\operatorname{sen} t}{\sqrt{2}}, \cos t\right) \ 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$$

e o ponto final é $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Logo

$$\int_\gamma \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{dr} = \phi\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) - \phi(0,0,1) = 0 - 1 = -1$$